

進展するネットワーク科学

-逆優先的選択と最適な結合耐性を中心に-

林 幸雄

北陸先端科学技術大学院大学 (JAIST) 融合科学共同専攻

電子情報通信学会 CCS/IN 研究会共催, Aug.3, 2023



目次

- 第1章 ネットワークの次数分布
- 第2章 データ分析としての基礎
- 第3章 情報拡散の最大化
- 第4章 高速な近似解法
- 第5章 分断しにくい最適耐性
- 第6章 災害や攻撃による破損後に役立つ代替経路
- 付録A いくつかの式の導出
- 付録B 実ネットワークデータの基本特性
- 付録C 自己修復の可視化デモ

1. 脆弱な SF 構造

社会的, 技術的, 生物的な現実の多くに共通, $P(k) \sim k^{-\gamma}$, $2 < \gamma < 3$.

Scale-free 構造の性質

頑健性: ランダムなノード故障には極めて強く連結性を保持.

脆弱性: ハブの**集中攻撃**で**極度に分断**.

理論的裏付け: D.S.Callaway et al., Phys.Rev.Lett. 85, 2000.



さらに, **連鎖被害**, **相互依存性**が加わった**三重苦**!

2. 優先的選択：次数に比例したリンク確率

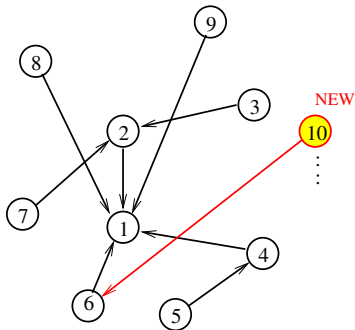
なぜ共通な構造が存在？ → リンク先選択に何か原理があるのでは！

- 国内航空網において新規航路を開設する際、全国各地への多くの乗り継ぎ便を持ったハブである羽田空港に乗り入れると便利で自社の利用客が増える。
- 多くの回線が接続する通信拠点に繋ぐ方が少ない経由数で何処にでも辿り着けそう。
- 貧乏人より金持ちと付き合った方が金回りが良い。

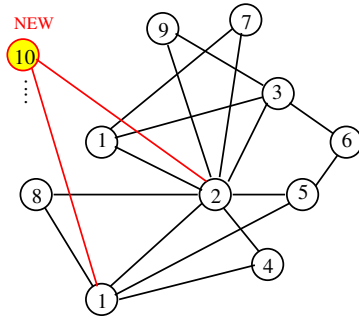
ノードを人に、リンクを経済取引から得るお金に対応付ければ、優先的選択は、"金持ちはより金持ちになる (rich get richer)" 法則に読み替えられる。

優先的選択は単なるネットワーク生成モデルの基本的規則に留まらず、ある種の利己原理を個々人が持てば、例え全体への影響を意図しなくても不平等な世界が生じうる！

GN 木と BA モデル



Krapivsky-Redner's GN model



BA model

P.L. Krapivsky, S.Redner, F.Leyvraz, *Phy.Rev.Lett.* 85, 2000., A.-L.Barabási, R.Albert, H.Jeong, *Physica A* 272, 1999.

⇒ 数理モデルで解析的にも、べき乗次数分布を導出.

利己性の度合いに従った $P(k)$ の変化

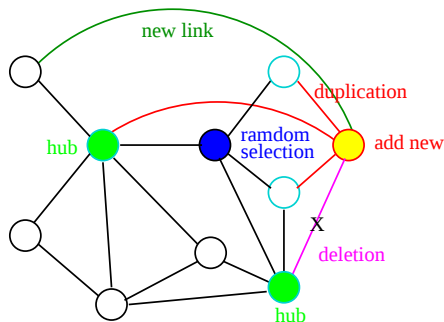
- Step 0:** 次数 0 の孤立ノードがない, N_0 個のノードが連結した初期構成を考える.
- Step 1:** $t = 1, 2, 3, \dots$ の毎時刻に新ノードを 1 個追加して, 新ノードから既存ノードに m 本のリンクを張る. 各ノード i は**確率** $\Pi_i \propto k_i^\nu$ で**選択**される.
- Step 2:** 所望のノード数 N まで, Step 1 を繰り返す.

利己性	無 $\nu = 0$	弱 $\leftarrow$ $0 < \nu < 1$	優先的選択 $\nu = 1$	$\rightarrow$ 強 $\nu > 1$
分布 $P(k)$ 核 A_k	指数	カットオフ付き乗 sublinear	べき乗 linear	独占状態 superlinear
ハブ の有無	ハブ無	最大次数が抑制	ハブ創出 BA 木	巨大ハブ

P.L. Krapivsky, S.Redner, F.Leyvraz, Phy.Rev.Lett. 85, 2000.

Duplication-Divergence Model

意図の無い、真似っ子でも SF 構造が創発してしまう !!



ランダムに選ばれた頂点に隣接するハブにはリンク複写のチャンス大!

⇒ 生物は、選択不要のより単純な機構で、優先的結合を実現!

R.V.Solé et al., SantaFe Inst. Working Paper, 01-08-041, 2001.

3. 玉葱状構造が最適と考えられたが...

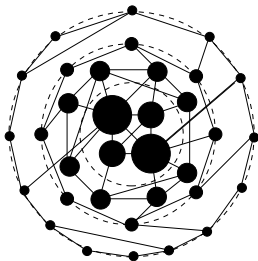
$P(k)$ 不変では攻撃に最適な結合耐性 = 正次数相関を持つ玉葱状構造.

C.M.Shneider et al., PNAS 810, 2011.,

T.Tanizawa, S.Havlin, and H.E.Stanley, PRE 85, 046109, 2012.

⇒ リンク全体張り替えのみ.

Z.-X.Wu, and P.Holme, PRE 84, 026116, 2011.



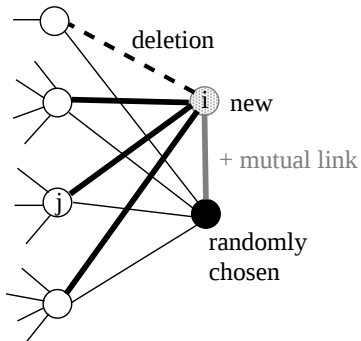
R 値の最大化をスワップで探索しても局所最適で、膨大な計算量.

培った繋がりを捨て去る, リンク全体の張替えは非現実的.

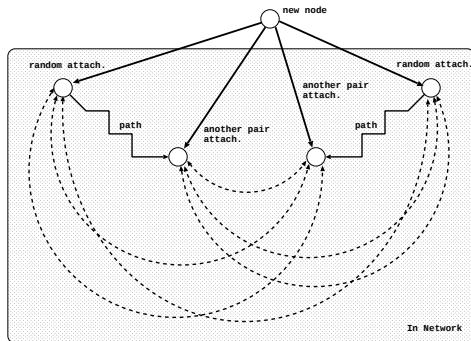
一方, 逐次成長法でも生成可能!

- 協調的な部分コピー操作.
Y.Hayashi, IEEE Xplore Digital Library SASO 2014., Y.Hayashi, Physica A 457, 2016.
- 仲介に基づく成長法.
Y.Hayashi, Network Science 6(1), 2018.

部分コピー操作（左）と仲介に基づく成長法（右）



Y.Hayashi, IEEE Xplore Digital Library SASO 2014., Y.Hayashi, Physica A 457, 2016.

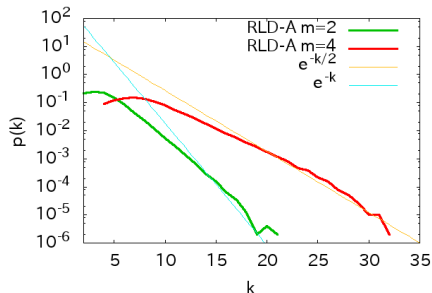
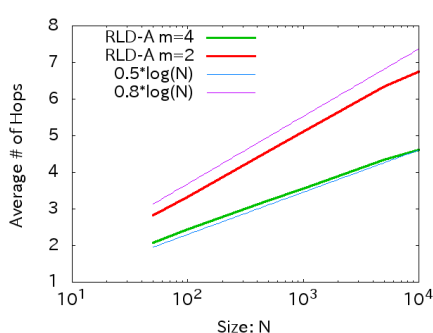


Y.Hayashi, Network Science 6(1), 2018.

⇒ 玉葱状構造を生成すると同時に、ループも増加（強化）.

利己主義を捨て、効率性と頑健性を両立可

Small-World 効果：仲介に基づく成長で最短経路の平均経路長は $O(\log N)$.
一方、利己主義：優先的選択に基づく現実の多くの Scale-Free ネットワークは効率重視で結合耐性は極端に脆い.



仲介に基づく逐次成長, $N = 5000$.
 $p(k)$ は近似的に指数分布.

Y. Hayashi, Network Science 6(1), 2018.

⇒ 従来の反省点として、Poisson 分布の Erdős-Rényi ランダムグラフと、べき乗分布の Scale-Free ネットの研究に世界的にピンポイント集中.

4. 木構造になりにくい ループ強化が要

Decycling グラフ G の decycling 数 $\theta_{dec}(G)$ はループ無グラフにする為に除去するノードの最小比.

Dismantling(剥ぎ取る, 裸にする) グラフ G の dismantling 数 $\theta_{dis}(G)$ は GC のサイズが定数 C より小さくなる為に除去するノードの最小比.

次数分布 $\{p_k\}$ のランダム疎グラフにおいて

$$\theta_{dec}(p_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} E[\theta_{dec}(G)], \quad \theta_{dis}(p_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{C \rightarrow \infty} E[\theta_{dis}(G, C)].$$

- 任意の次数分布で $\theta_{dis}(p_k) \leq \theta_{dec}(p_k)$
- $\langle k^2 \rangle < \infty$ なら, $\theta_{dis}(p_k) = \theta_{dec}(p_k)$.

⇒ NP 困難な Decycling 問題と Dismantling 問題は漸近的に等価.

A.Braunstein et al., PNAS 113(44), 12368-12373, 2016.

準備 Nonbacktracking Matrix B

$$\begin{array}{c} \vdots \\ k \rightarrow i \\ k \leftarrow i \\ \vdots \end{array} \begin{bmatrix} \vdots & i \rightarrow j & i \leftarrow j & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & n_i & 0 & \dots \\ \dots & 0 & n_i & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix},$$

有限グラフの伊原 Zeta 関数

$$\zeta_G(z) = \det(I - zB)^{-1} = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} z^m \text{Tr} B^m \right).$$

K.Hashimoto, Advanced Studies in Pure Math. 15, 1989.

NB random walks mix faster.

N.Alon et al., Comm. Contemp. Math. 9(4), 2007.

インフルエンサー除去で GC 崩壊

リンク $i \rightarrow j$ で情報伝搬する確率：メッセージ伝搬式

$$\nu_{i \rightarrow j} = n_i \left[1 - \prod_{k \in \partial i \setminus j} (1 - \nu_{k \rightarrow i}) \right].$$

ノード除去率 q に対して, 上記の反復写像の (伝搬が途絶える) 原点の安定性は, 右辺の線形近似における Jacobian 行列 $\mathcal{M}$ の最大固有値 $\lambda(n; q)$ が 1 より小さい時に満足.

$$\left. \frac{\partial \nu_{i \rightarrow j}}{\partial \nu_{k \rightarrow l}} \right|_{\nu_{i \rightarrow j}=0} = n_i B_{k \rightarrow l, i \rightarrow j}.$$

l 回の反復写像 $\mathbf{w}_l(n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}^l \mathbf{w}_0$ に対する Power Method:

$$\lambda(n; q) = \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\frac{|\mathbf{w}_l(n)|}{|\mathbf{w}_0|} \right]^{1/l},$$

F.Morone, and H.A.Makse, Nature 524, 65-68, 2015.

$\min \lambda(n; q)$ に関する $2l$ -体問題

$\min \lambda(n; q)$ に関する $2l$ -体問題を Greedy に解くと、順に除去するインフルエンサーは $Cl_l(i)$ 値が最大のノード i

$$|\mathbf{w}_2(n)|^2 = \sum_{i,j,k \neq i, l \neq j} A_{ij} A_{jk} A_{kl} (k_i - 1)(k_l - 1) n_i n_j n_k n_l,$$

$$|\mathbf{w}_l(n)|^2 \approx \sum_{i=1}^N (k_i - 1) \sum_{j \in \partial \text{Ball}(i, 2l-1)} (\prod_{k \in P_{2l-1}(i,j)} n_k) (k_j - 1),$$

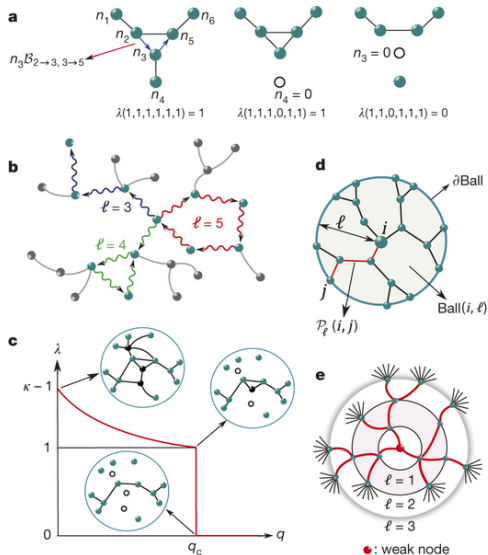
$$Cl_l(i) \stackrel{\text{def}}{=} (k_i - 1) \sum_{j \in \partial \text{Ball}(i, l)} (k_j - 1).$$

$P_{2l-1}(i, j)$ は $2l - 1$ ホップで i と j を繋ぐパス,
 $\partial \text{Ball}(i, l)$ は i から l ホップ先のノード集合

⇒ インフルエンサー除去でループが無くなると GC が崩壊して、伝搬も途絶える！

F.Morone, and H.A.Makse, Nature 524, 65-68, 2015.

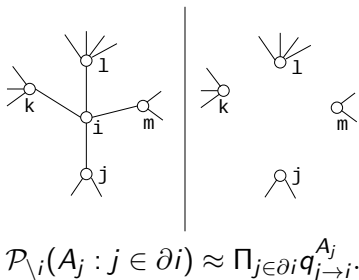
CI: Collective Influence



F.Morone, and H.A.Makse, Nature 524, 65-68, 2015.

統計物理の Cavity(空洞) グラフによる近似解法

Bethe-Peierls 近似：
独立積



$$\mathcal{P}_{\setminus i}(A_j : j \in \partial i) \approx \prod_{j \in \partial i} q_{j \rightarrow i}^{A_j}$$

<https://digital.library.cornell.edu/catalog/ss:544219>

- ① $A_i = 0$: i は非占有の状態：木の根として不要。
⇒ 木以外のループ形成の為のノード。
- ② $A_i = i$: i 自身が根. i が追加結合された時, 隣接 $j \in \partial i$ の状態 $A_j = j$ は, i が j の根の状態 $A_j = i$ に変化可。
- ③ $A_i = l$: i が追加結合された時, ある隣接 $l \in \partial i$ が存在して, 他の全ての $k \in \partial i$ が非占有 or 根なら, l が i の根。

H.-J.Zhou, Euro.Phys. J. B 86, 2013.

最小 FVS を求める確率伝搬法

最小フィードバック頂点集合 (Feedback Vertex Set) 問題の近似解法

- ① i が非占有の確率: $q_i^0 = \frac{1}{z_i}$,
- ② j が非占有 or 根で, i が根の確率:

$$q_i^j = \frac{e^x \prod_{j \in \partial i} (q_{j \rightarrow i}^0 + q_{j \rightarrow i}^j)}{z_i},$$

- ③ l が占有かつ他の k は非占有 or 根で, i の根が l の確率:

$$q_i^l = \frac{e^x (1 - q_{l \rightarrow i}^0) \prod_{k \in \partial i} (q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k)}{z_i},$$

正規化条件 $q_i^0 + q_i^j + \sum_{l \in \partial i} q_i^l = 1$ より

$$z_i \stackrel{\text{def}}{=} 1 + e^x \left[\prod_{j \in \partial i} (q_{j \rightarrow i}^0 + q_{j \rightarrow i}^j) + \sum_{l \in \partial i} (1 - q_{l \rightarrow i}^0) \prod_{k \in \partial i \setminus l} (q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k) \right].$$

メッセージ伝搬のBP更新式

右辺は積和型式 (product-sum) であることに注意！

$$q_{i \rightarrow j}^0 = \frac{e^{-x}}{z_{i \rightarrow j}^{FVS}(t)}, \quad (1)$$

$$q_{i \rightarrow j}^i = \frac{\prod_{k \in \partial i \setminus j} (q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k)}{z_{i \rightarrow j}^{FVS}}, \quad (2)$$

$$q_{i \rightarrow j}^l = \frac{(1 - q_{l \rightarrow i}^0) \prod_{k \in \partial i \setminus j, l} (q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k)}{z_{i \rightarrow j}^{FVS}}, \quad l \in \partial i \setminus j, \quad (3)$$

$$z_{i \rightarrow j}^{FVS} \stackrel{\text{def}}{=} e^{-x} + \left\{ \prod_{k \in \partial i \setminus j} (q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k) \times \left(1 + \sum_{l \in \partial i \setminus j} \frac{1 - q_{l \rightarrow i}^0}{q_{l \rightarrow i}^0 + q_{l \rightarrow i}^l} \right) \right\}, \quad (4)$$

最小 FVS における自由エネルギー最小化

BP 更新式の平衡点は, 以下の自由エネルギー F^{FVS} の最小化に対応する.

$$F^{FVS} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \Phi_i^{FVS} - \sum_{i,j} \alpha_{ij} \Phi_{ij}^{FVS}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Phi_i^{FVS} \stackrel{\text{def}}{=} & -\frac{1}{x} \ln \left[e^{-x} + \prod_{k \in \partial i} \left(q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k \right) \right. \\ & \left. + \sum_{l \in \partial i} (1 - q_{l \rightarrow i}^0) \prod_{k \in \partial i \setminus l} (q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^{FVS} \stackrel{\text{def}}{=} & -\frac{1}{x} \ln \left[\left(q_{j \rightarrow i}^0 + q_{j \rightarrow i}^j + \sum_{l' \in \partial j \setminus i} q_{j \rightarrow i}^{l'} \right) q_{i \rightarrow j}^0 \right. \\ & \left. + \left(q_{j \rightarrow i}^0 + q_{j \rightarrow i}^j \right) q_{i \rightarrow j}^j + \sum_{l \in \partial i \setminus j} \left(q_{j \rightarrow i}^0 + q_{j \rightarrow i}^j \right) q_{i \rightarrow j}^l \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

BP 更新式の平衡点

式 (5)(6)(7) に従った自由エネルギーの極小点

$$\frac{\partial (x F^{FVS})}{\partial q_{j \rightarrow i}^0} = 0, \quad \frac{\partial (x F^{FVS})}{\partial q_{j \rightarrow i}^j} = 0, \quad \frac{\partial (x F^{FVS})}{\partial q_{j \rightarrow i}^{l'}} = 0, \quad l' \in \partial j \setminus i, \quad (8)$$

は, 上記の式 (5)(6)(7) から導かれる各成分として,

$$\frac{\text{式 (1) 右辺分子}}{\Phi_i^{FVS} \text{の右辺 ln 中部分}} - \alpha_{ij} \frac{q_{i \rightarrow j}^0}{\Phi_{ij}^{FVS} \text{の右辺 ln 中部分}} = 0, \quad (9)$$

を満たすとき, すなわち, BP 更新式 (1) の平衡点で与えられる (式 (2)(3) も同様). ここで,

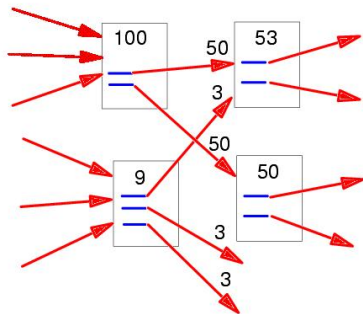
$$\alpha_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Phi_{ij}^{FVS} \text{の右辺 ln 中部分} \times z_{ij}^{FVS}}{\Phi_i^{FVS} \text{の右辺 ln 中部分}},$$

とした上式右辺は BP 更新式 (1)(2)(3) の平衡点の値で定義される.

筋の良い機械学習的アルゴリズムはメッセージ伝搬

- 階層型ニューラルネットにおける誤差逆伝搬学習
- 遺伝的アルゴリズム (GA)：マルコフ連鎖
- ターボ符号復号や画像修復, 因果関係の推論などにおける確率伝搬法 (BP)
- スピングラス統計物理手法による **組合せ最適化問題の近似解法**
- 非負値行列/テンソルの因子分析, 補助関数を用いた反復計算法

Google PageRank



<http://baba.la.coocan.jp/wais/pagerank.html>

⇒ 分散処理が可能というメリットも有！

種々のノード攻撃

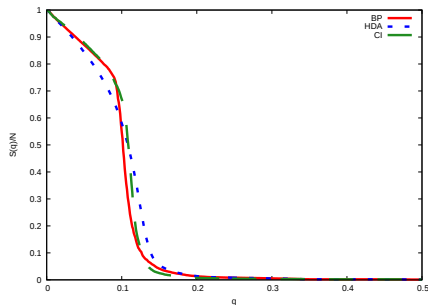
上から下にいくほど破壊力が増す.

標的	基本	亜種
一様	ランダム	
中心	媒介中心性など	
ハブ	次数順	知人の免疫化
拡散の要	CI_I	CI_p $CI-TM_L$
結合の核	CoreHD 2-core	k-core
ループ	BP	BPD

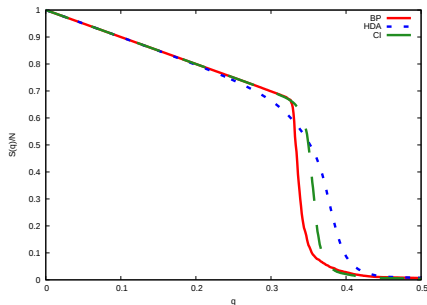
林 編著, Python と複雑ネットワーク分析, 第 4 章, 2019.

破壊力のある攻撃の比較（曲線下の面積: R 値）

ネット生成後にランダム張替えして、次数分布 $P(k)$ の影響のみ考慮.



(a) k^1 -PA SF, べき乗分布

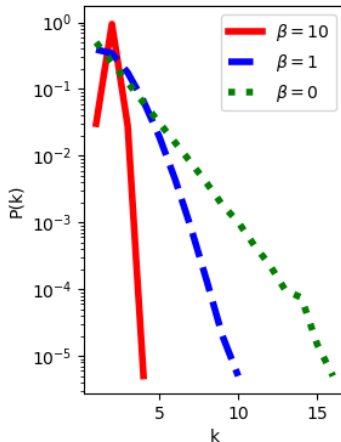
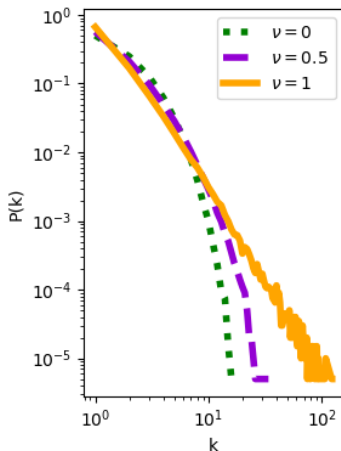


(d) k^{-100} -IPA, より狭い分布

実線：HDA 攻撃（再帰的な局所中心の除去），破線：BP 攻撃（ループ破壊），点線： CI_3 攻撃（インフルエンサー除去）.

5. ハブを無くす逆優先的選択 (Inv.Pref.Attach.)

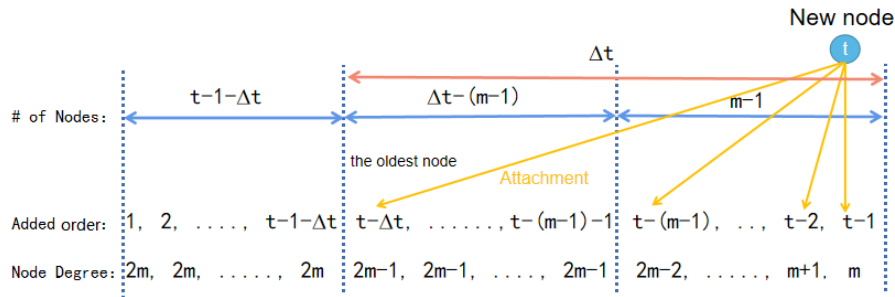
$N = 1000$, $m = 1$ の 100 平均, 左 k^ν -attach., 右 $k^{-\beta}$ -attach.



⇒ 指数分布より, β 大になるほど分布の幅が狭く, 分散が小さくなる.

$\beta \rightarrow \infty$ での最小次数選択

時刻 t で挿入された新ノードは時刻 $t-1$ から $t-(m-1)$ に挿入された次数 m から次数 $2m-2$ の 1 個ずつのノードにまず結合する. m 本中の残りの 1 本は, 複数存在する次数 $2m-1$ のノード (のどれか) に結合する. また毎時刻 m 本なので, 次数 $2m$ より大きいノードは存在し得ない.

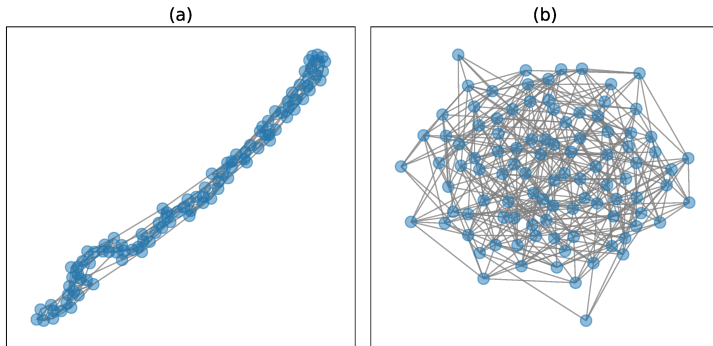


上段: 3 区間のノードの個数, 中段: 挿入された時刻 (順番), 下段: そのノードの時刻 t での次数をそれぞれ表す.

F.Liao, Y.Hayashi, Physica A 599(127427), 2022.

鎖状構造の可視化例

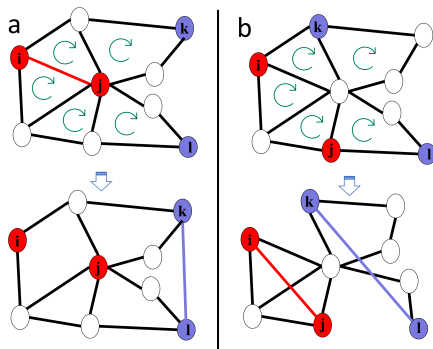
(a) IPA モデル ($N = 200, m = 4, \beta = 200$), (b) Config でランダム化.



M.Chujyo, Y.Hayashi, Proc. of Complex Networks & Their Applications XI, 2022.

6. ループ強化に基づく頑健性向上, NP 困難を回避して

左 a 次数非保存のリワイヤリング, 右 b 次数保存のリワイヤリング.



① 次数 k_i や ② ループ強化に関する BP の q_i^0 が最大のノード間のリンク除去, それら最小のノード間にリンク追加, あるいは ③ ΔST が最大のリンク除去と追加を本数分だけ繰り返す.

M.Chujyo, Y.Hayashi, Applied Network Science 6(3), 2021.

固有値の摂動で近似計算

③ の手法: 行列木定理により, 全域木の数 ST は

$$ST = \frac{1}{N} \prod_{i=2}^N \mu_i,$$

と書き表される (各非木辺に対応する閉路は一次独立な基底をなす). ここで, $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_N$ は Laplacian 行列 $L_a \stackrel{\text{def}}{=} D - A$ の固有値で, 各ノード i の次数 k_i の対角行列 $D \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag}\{k_i\}$ とする.

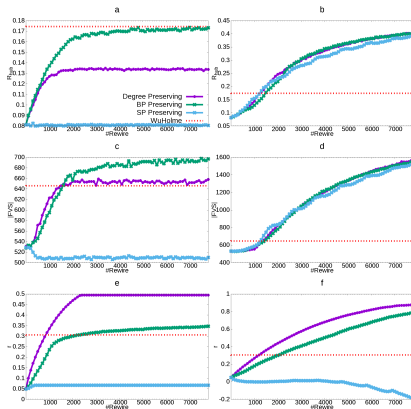
$$\begin{aligned} \Delta ST &= \frac{1}{N} \prod_{h=2}^N (\mu_h \pm \Delta \mu_h) - ST, \\ &\approx ST \times \left(\prod_{h=2}^N \frac{\mu_h \pm (v_{hi} - v_{hj})^2}{\mu_h} - 1 \right). \end{aligned}$$

$O(N^3)$ の固有値の再計算をせずに $O(N)$ で近似的に求められる. v_{hi} は第 h 固有ベクトル $\mathbf{v}_h$ の i 成分を表し, $\pm$ の符号は辺の追加または除去に対応.

H.Chan, L.Akoglu, Data Mining Knowledge Discovery 30, 2016.

リワイヤリングによる頑健性の向上

① 次数, ② q_i^0 , ③ ST 数に基づく手法を Open Flight の実データに適用.
左 次数保存のリワイヤリング, 右 次数非保存のリワイヤリング (効果大)



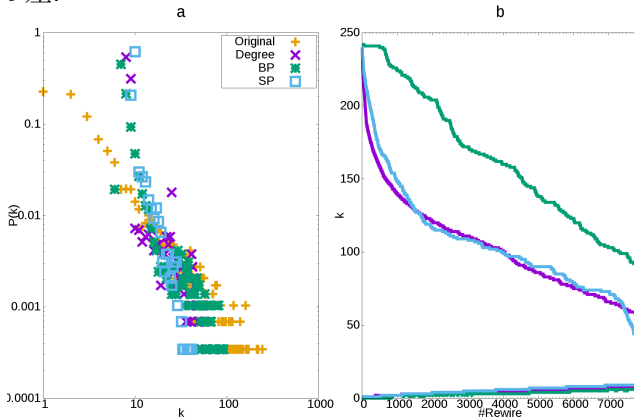
上から下に順に, 頑健性指標 R_{HDA} , $|FVS|$, 次数相関 r .

⇒ 負相関でも高い頑健性と大きな $|FVS|$ が存在, ループ強化がより重要!

M.Chujyo, Y.Hayashi, Applied Network Science 6(3), 2021.

リワイヤリングによる次数分布の変化の共通性

左図 a 非保存の次数分布の比較, 右図 b 張替え本数に対する上線 k_{min} と下線 k_{max} の差.

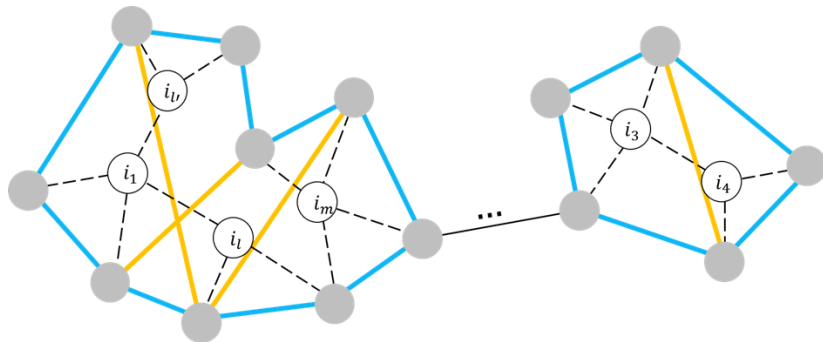


⇒ 負相関の場合を含めて, リワイヤリングで $P(k)$ の幅が狭まる!

M.Chujyo, Y.Hayashi, Applied Network Science 6(3), 2021.

ループ強化に基づく自己修復法

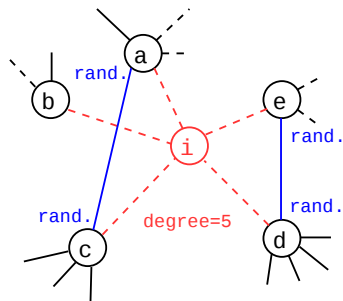
拡張隣接ノード間の輪形成（穴の周囲補強） + 輪上のループ強化（BP or 最小次数） $\Rightarrow$ 修復の範囲拡張と分散アルゴリズム化を実現。



Y.Hayashi, A.Tanaka, J.Matsukubo, Entropy 23(102), Special Issue: Critical Phenomena and Optimization in Complex Networks, 2021.,

J.Kim, Y.Hayashi, Frontier in Physics 10(870560), 2022.

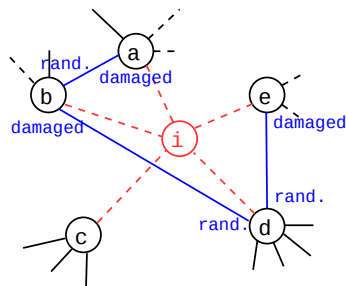
従来の修復法：隣接ノード間のみが対象



reused $5/2 \rightarrow 2$ links

Bypass Rewiring: 攻撃除去ノード i の次数の半分 $\lfloor k_i/2 \rfloor$ だけの本数制約で、一様ランダム選択した隣接ノード間を結合。

J.Park, S.G.Hahn, Phys. Rev. E 94, 2016.

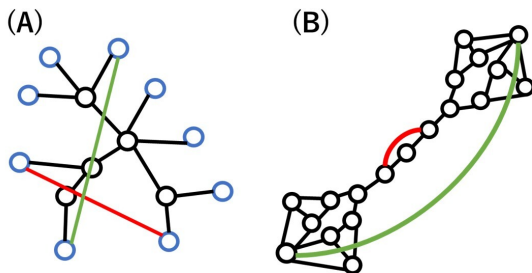


$5 \times 0.6 = 3$ links

Simple Local Repair: 次数 k_i の割合 f_s の本数だけ、次数減のダメージが大きい $k_{dam}/k_{orig} < \theta$ の昇順選択ノードをランダム選択と結合.
L.K.Gallos, N.H.Fefferman, Phys. Rev. E 92, 2015.

リンク追加でも最小次数選択が支配的

最小次数戦略と最長距離戦略で選択ノードが (A) 同じと (B) 異なる例.



二段階の提案法

二段 \ 一段	全ノード	最小次数ノード
一様ランダム	RandAdd	min-k RandAdd
最も長距離	LongAdd	min-k LongAdd
最も短距離	ShortAdd	min-k ShoerAdd

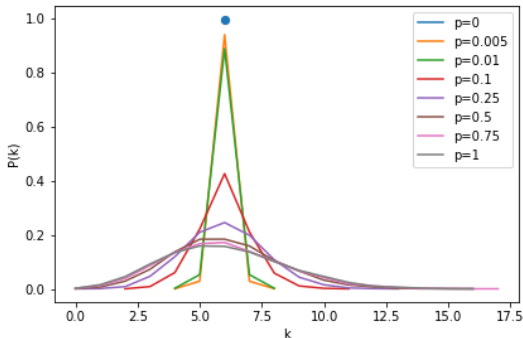
M.Chujyo, Y.Hayashi, PLOS ONE 10(1371), 2022.

7. 均一な構造こそ最適な攻撃耐性

d レギュラーからの面的な摂動解析

離散摂動：二種の次数 d_1 , d_2 のみの二峰性ネット, $\Delta d \stackrel{\text{def}}{=} d_2 - d_1 > 0$,
次数分布 $P(k)$ の分散 $\sigma^2 = (d - d_1)\Delta d - (d - d_1)^2$,

割合 p のランダム摂動：多峰な数種類の次数が存在（下図）.



M.Chujyo, Y.Hayashi, T.Hasegawa, arXiv:2301.06291.

二峰性ネットの次数の組合せは網羅的

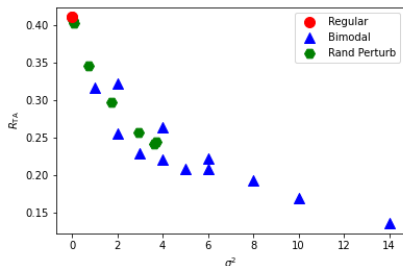
明らかに脆弱な星型を除く: $2 \leq d_1 \leq d-1$, $d+1 \leq d_2 \leq N-2$,
 $\langle k \rangle = d_1 P(d_1) + d_2 P(d_2) = d = 4$ で, 次数の組合せを網羅.

Δd	d_1	d_2	σ^2	$P(d_1) = N_1/N$
2	3	5	1	1/2
3	3	6	2	2/3
	2	5	2	1/3
4	3	7	3	3/4
	2	6	4	2/4
5	3	8	4	4/5
	2	7	6	3/5
	$\vdots$		$\vdots$	
Δd	$d-1=3$	$\Delta d + d_1$	$\Delta d - 1$	$(\Delta d - 1)/\Delta d$
	$d-2=2$	$\Delta d + d_2$	$2(\Delta d - 2)$	$(\Delta d - 2)/\Delta d$

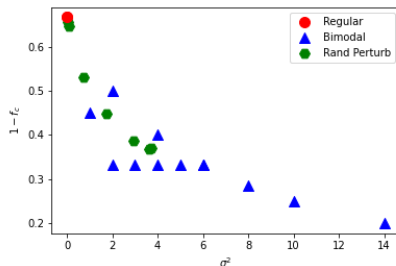
M.Chujyo, Y.Hayashi, T.Hasegawa, arXiv:2301.06291.

悪意のある次数順攻撃に対する耐性

$N = 6300$, $\langle k \rangle = 4$ の場合, 摂動による次数分布 $P(k)$ の分散 σ^2 に対して



(a) 頑健性指標：数値計算



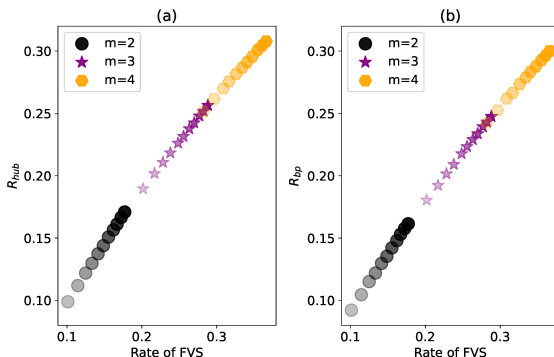
(b) 浸透しきい値：理論解析

⇒ ランダムレギュラグラフが最も頑健！

M.Chujyo, Y.Hayashi, T.Hasegawa, arXiv:2301.06291.

次数分布の連続変化と頑健性

線的な摂動：濃淡で示す **べき乗分布から指数分布の連続変化** (k^ν に比例する結合選択の GN モデル, $N = 10^3$, $\nu = 0, 0.1, \dots, 1$, を Config でランダム化) に対する再帰計算の次数順攻撃とループ破壊への頑健性.

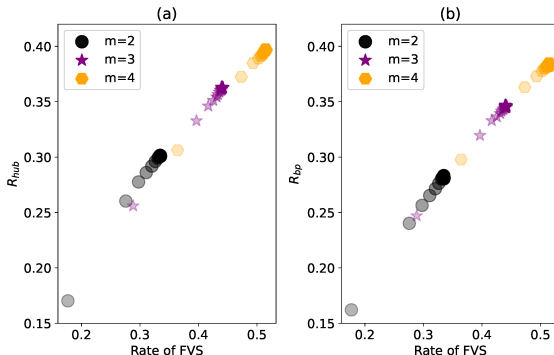


⇒ R 値と $|FVS|$ が連動して強く相関し, $P(k)$ が狭い程それらは大.

M.Chujyo, Y.Hayashi, Proc. of Complex Networks & Their Applications XI, 2022.

次数分布の連続変化と頑健性（続き）

線的な摂動：濃淡で示す 指数分布からより狭い分布の連続変化 ($k^{-\beta}$ に比例する IPA モデル, $N = 10^3$, $\beta = 0, 10, \dots, 200$, を Config でランダム化) に対する再帰計算の次数順攻撃とループ破壊への頑健性.



⇒ R 値と $|FVS|$ が連動して強く相関し, $P(k)$ が狭い程それらは大.

M.Chujyo, Y.Hayashi, Proc. of Complex Networks & Their Applications XI, 2022.

8. まとめ

- 頑健性の向上には、次数相関よりループ強化がより本質的.
その根拠は、Dismantling $\Leftrightarrow$ Decycling, CI におけるループと分断の関連性, ループ破壊の最悪性, 負相関でも頑健な具体例 等々.
- ループ強化に基づく, リワイヤリング (自己修復を含む) やリンク追加において, 次数分布の幅が狭い程, 頑健性が高くなることが共通.
- 攻撃耐性を上げるには, 次数分布を底上げする, 最小次数ノード結合が有効. 従って, 逆優先的選択に着目すべき.
- 次数分布の幅が最小: ゼロのランダムレギュラグラフは攻撃耐性が最適になることを, 二峰性の網羅的な離散摂動と多峰性のランダム摂動との両比較で検証.

⇒ 通信効率を落とさず, 頑健性を強固にするには, 利己的な強者への結合から相互扶助的な弱者への結合に移行すべき !!

補足 1. NN 学習で組合せ最適化の近似解を得る試み

- Graph Convolutional Network (GCN) で Dismantling 集合を推定.
各ノードの中心性など複数 p 個の特徴量を付与した $p \times N$ 次元の入力ベクトルを考え, 25 ノードの小規模の部分グラフにおいて攻撃の標的を選ぶように事前学習した畳み込みフィルタを用いる.
M.Grassia et al., Nature Communications 12(5190), 2021.
- Graph Neural Network (GNN) の強化学習で, 最小 VC 問題, 最小カット問題, 巡回セールスマン問題を近似的に解く.
グラフカーネルとして反復伝搬の集約・結合 (aggregate 関数と combine 関数) と反復最後の読み出し (readout 関数) を用いた structure2vec グラフ埋め込みで特徴ベクトルに変換させた後, そのベクトルを入力としてランダム初期値の結合重み等のパラメータを学習.
H.Dai et al., Proc. of the 31st Int. Conf. on NIPS, 2017.

補足2. 不慮のランダム故障に対する耐性

次数分布の分散

$$\begin{aligned}\sigma^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_k (k - \langle k \rangle)^2 P(k) \\ &= \sum_k k^2 P(k) - 2\langle k \rangle \sum_k k P(k) + \langle k \rangle^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2,\end{aligned}$$

から $\langle k^2 \rangle = \sigma^2 + \langle k \rangle^2$ を浸透の臨界値 $p_c = 1/(\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle - 1)$ に代入して

$$p_c = \frac{\langle k \rangle}{\sigma^2 + \langle k \rangle^2 - \langle k \rangle}.$$

⇒ ランダム故障には分散 σ^2 最大の SF ネットが p_c 最小で最適だが、
 $\sigma = 0$ の $d \gtrsim 6$ レギュラーグラフでも崩壊の下限値（浸透の上限値
 $p_c = 1/(d-1)$ ） $q_c = 1 - p_c = \frac{d-2}{d-1} \geq 0.8$ で十分強い！

補足3. 不動点 $F(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ の安定性

$$\mathbf{x}^{t+1} = F(\mathbf{x}^t) \approx F(\mathbf{a}) + \left[\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] (\mathbf{x}^t - \mathbf{a}) + \dots,$$

$$\frac{\mathbf{x}^{t+1} - \mathbf{a}}{\mathbf{x}^{t-1} - \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{x}^{t+1} - \mathbf{a}}{\mathbf{x}^t - \mathbf{a}} \times \frac{\mathbf{x}^t - \mathbf{a}}{\mathbf{x}^{t-1} - \mathbf{a}} \approx \left[\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^2.$$

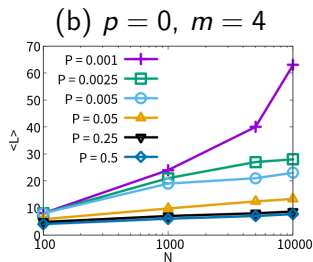
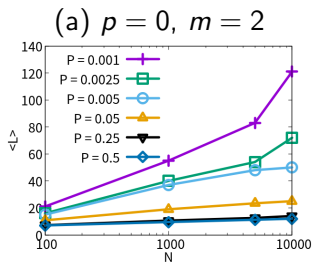
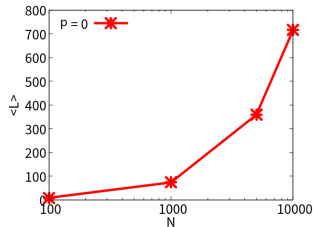
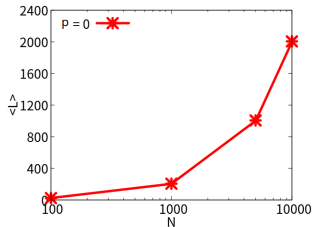
$$\mathbf{x}^0 - \mathbf{a} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots \mathbf{u}_n$$

の固有ベクトル $\mathbf{u}_i$ の和で表わすと, $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots |\lambda_n|$ より $t \rightarrow \infty$ の反復 $F(F(F(\dots F(\mathbf{x}^0)\dots)))$ の近似値は

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^t (\mathbf{x}^0 - \mathbf{a}) &= \lambda_1^t \mathbf{u}_1 + \lambda_2^t \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n^t \mathbf{u}_n \\ &= \lambda_1^t \mathbf{u}_1 + \lambda_1^t \left\{ \sum_{i=2}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^t \mathbf{u}_i \right\} \rightarrow \lambda_1^t \mathbf{u}_1. \end{aligned}$$

$|\lambda_1| > 1$ ならば発散, $|\lambda_1| < 1$ ならば零に収束.

補足4. 混合モデルのSW性: 平均経路長 $\langle L \rangle$ が $O(\log N)$



(c) $p > 0, m = 2$

(d) $p > 0, m = 4$