

インフルエンサーの抽出と機械学習的アルゴリズム

林 幸雄

北陸先端科学技術大学院大学

改訂第 1 版 2024

1. 口コミ情報拡散ビジネス

「インフルエンサーマーケティングが企業プロモに効果的な5つの理由」

下手な芸能人より稼ぐインフルエンサー

- ① ミレニアル世代からの絶大な支持: 1/3
- ② 消費者の購買欲の鍵を握る: 倍の宣伝効果, 半数が信用
- ③ より多くのフォロワーにリーチ可能
- ④ ならではのオリジナルコンテンツの力: クリエイティビティ
- ⑤ 様々な目的のコラボレーションが可能: 実際に体験

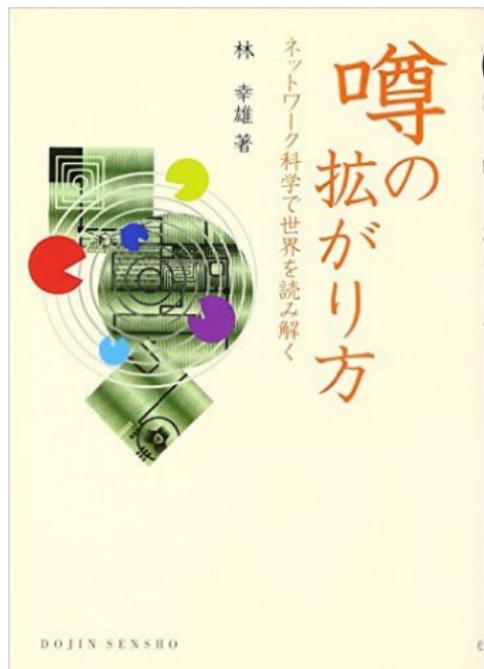
<http://blog.btrax.com/jp/2016/06/13/influencer-marketing/>

絶大な影響を与えた例: ▶ Justin Bieber の推奨で全世界に広まった ▶ PPAP

インフルエンサー～市場の達人 in 消費

市場の達人: 複数の商品カテゴリや小売店などについて熟知し、話を自ら主導すると同時に、人から情報源として頼りにされてる。広く浅く情報収集するだけでなく、それを増幅して遠心的に発信する傾向。

オピニオンリーダー: 自分が詳しいある限られた分野のみで影響を発揮。特定の領域について強い関心や豊富な知識・経験を持ち、集めた情報を噛み砕いて加工する傾向。



呉著「『市場の達人』とインターネット：『オピニオンリーダー』との比較」，池田謙一編「インターネット・コミュニティと日常世界」，誠心書房，2005.

インフルエンサーの影響力

- 草の根インフルエンサー

「一般消費者は、高度な専門知識を持つインフルエンサーのクチコミを求めているのではなく、「少し上」の人の意見を聞きたい」

▶ 「インフルエンサー」は本当に使えるのか？

▶ インフルエンサーマーケティング

- ソーシャルスコアリング：インフルエンサー度

「スコアリング手法について明らかにしていないが、ソーシャルメディアごとに、スコアリングに用いる変数については公開している場合が多い。例えば、▶ Klout では、Twitter なら、被リツイート数、メンション（自分が発言したことに対して、何らかの意見をもらうこと）数、フォロワー数、リプライ数等。Facebook なら、メンション数、いいね数、コメント数、ウォール投稿数、友人の数といった具合だ。」

▶ ソーシャルメディアにおける影響力を測る

- 宣伝効果等を測る為に、企業やブランドに対する愛着・信頼の度合いを数値化：▶ NPS Net Promoter Score/System

KCORE ANALYTICS

Searching - KCORE ANALYTICS - Mozilla Firefox

www.kcore-analytics.com/searching/?keyword=Network+Scier

Results for : Network Science

Sort options: SORT BY INFLUENCE (selected), SORT BY FOLLOWERS, SHOW NETWORK

	GdnVoluntary	1	7.46	48949
	guardian	2	6.21	5980554
	barabasi	3	4.29	8440
	michaeldsimmons	4	3.57	13620
	autismspeaks	5	3.40	219000
	pau1kirby	6	2.76	12220

<http://ww.kcore-analytics.com>

CI と PageRank では似た現象?

当時の 2 大注目 WWW 検索技術は, 高度 AI 言語理解, リコメンデーション/協調フィルタリング

AltaVista, Infoseek, NTT (風間), 日立 (高野), ...

全く異なる発想で, 理論的裏付けもある, リンク構造を用いた中心性: PageRank が覇者に

⇒ インフルエンサーの抽出でも同様となるか?

補足: Inferring personal economic status from social network location, nature comm. 5/16 2017.



Comm. of the ACM,
Special Issue on Info.
Filtering, 35(12), Dec.
1992.

2. 機械学習の本質はメッセージ伝搬

- 階層型ニューラルネットにおける誤差逆伝搬学習

2. 機械学習の本質はメッセージ伝搬

- 階層型ニューラルネットにおける誤差逆伝搬学習
- 遺伝的アルゴリズム (GA)：マルコフ連鎖

2. 機械学習の本質はメッセージ伝搬

- 階層型ニューラルネットにおける誤差逆伝搬学習
- 遺伝的アルゴリズム (GA) : マルコフ連鎖
- ターボ符号復号や画像修復, 因果関係の推論などにおける確率伝搬法 (BP)

2. 機械学習の本質はメッセージ伝搬

- 階層型ニューラルネットにおける誤差逆伝搬学習
- 遺伝的アルゴリズム (GA) : マルコフ連鎖
- ターボ符号復号や画像修復, 因果関係の推論などにおける確率伝搬法 (BP)
- スピングラス統計物理手法による **組合せ最適化問題の近似解法**

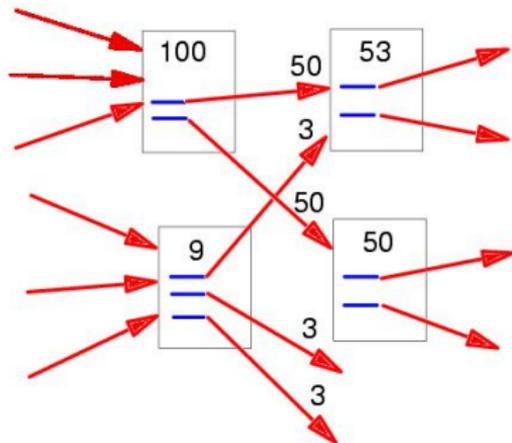
2. 機械学習の本質はメッセージ伝搬

- 階層型ニューラルネットにおける誤差逆伝搬学習
- 遺伝的アルゴリズム (GA) : マルコフ連鎖
- ターボ符号復号や画像修復, 因果関係の推論などにおける確率伝搬法 (BP)
- スピングラス統計物理手法による **組合せ最適化問題の近似解法**
- 非負値行列/テンソルの因子分析, 補助関数を用いた反復計算法

2. 機械学習の本質はメッセージ伝搬

- 階層型ニューラルネットにおける誤差逆伝搬学習
- 遺伝的アルゴリズム (GA) : マルコフ連鎖
- ターボ符号復号や画像修復, 因果関係の推論などにおける確率伝搬法 (BP)
- スピングラス統計物理手法による **組合せ最適化問題の近似解法**
- 非負値行列/テンソルの因子分析, 補助関数を用いた反復計算法

Google PageRank



準備 1 Nonbacktracking Matrix B

$$\begin{array}{c} \vdots \\ k \rightarrow i \\ k \leftarrow i \\ \vdots \end{array} \begin{bmatrix} \vdots & i \rightarrow j & i \leftarrow j & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & n_i & 0 & \dots \\ \dots & 0 & n_j & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \end{bmatrix},$$

有限グラフの伊原 Zeta 関数

$$\zeta_G(z) = \det(I - zB)^{-1} = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} z^m \text{Tr} B^m\right).$$

K.Hashimoto, Advanced Studies in Pure Math. 15, 1989.

NB random walks mix faster

N.Alon et al., Comm. Contemp. Math. 9(4), 2007.

準備 1'

$$\text{Tr} B^m = \lambda_1^m + \lambda_2^m + \dots + \lambda_N^m,$$

$$\log(1 - x) = \log(1 + (-x)) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m},$$

を用いて

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}(\lambda_1^m z^m + \dots + \lambda_N^m z^m)\right) \\ &= \exp\left(-\log(1 - \lambda_1 z) - \dots - \log(1 - \lambda_N z)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{l=1}^N \log \frac{1}{1 - \lambda_l z}\right) \\ &= \exp\left(\log \prod_{l=1}^N \frac{1}{1 - \lambda_l z}\right) \\ &= \frac{1}{(1 - \lambda_1 z) \dots (1 - \lambda_N z)} = \det(I - zB)^{-1}. \end{aligned}$$

現代数学の広がり 1, 砂田著 第3章, 岩波書店, 1996.

準備2 不動点 $F(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ の安定性

$$\mathbf{x}^{t+1} = F(\mathbf{x}^t) \approx F(\mathbf{a}) + \left[\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] (\mathbf{x}^t - \mathbf{a}) + \dots,$$

$$\frac{\mathbf{x}^{t+1} - \mathbf{a}}{\mathbf{x}^{t-1} - \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{x}^{t+1} - \mathbf{a}}{\mathbf{x}^t - \mathbf{a}} \times \frac{\mathbf{x}^t - \mathbf{a}}{\mathbf{x}^{t-1} - \mathbf{a}} \approx \left[\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^2.$$

$$\mathbf{x}^0 - \mathbf{a} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_n$$

の固有ベクトル \mathbf{u}_i の和で表わすと, $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ より $t \rightarrow \infty$ の反復 $F(F(F(\dots F(\mathbf{x}^0)\dots)))$ の近似値は

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^t (\mathbf{x}^0 - \mathbf{a}) &= \lambda_1^t \mathbf{u}_1 + \lambda_2^t \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n^t \mathbf{u}_n \\ &= \lambda_1^t \mathbf{u}_1 + \lambda_1^t \left\{ \sum_{i=2}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^t \mathbf{u}_i \right\} \rightarrow \lambda_1^t \mathbf{u}_1. \end{aligned}$$

$|\lambda_1| > 1$ ならば発散, $|\lambda_1| < 1$ ならば零に収束

2-1 インフルエンサー除去で GC 崩壊

リンク $i \rightarrow j$ で情報伝搬する確率：メッセージ伝搬式

$$\nu_{i \rightarrow j} = n_i \left[1 - \prod_{k \in \partial i \setminus j} (1 - \nu_{k \rightarrow i}) \right].$$

ノード除去率 q に対して、上記の反復写像の安定性は右辺の線形近似における Jacobian 行列 \mathcal{M} の最大固有値 $\lambda(n; q)$ が 1 より小さい時に満足。

$$\left. \frac{\partial \nu_{i \rightarrow j}}{\partial \nu_{k \rightarrow l}} \right|_{\nu_{i \rightarrow j}=0} = n_i B_{k \rightarrow l, i \rightarrow j}.$$

$\mathbf{w}_l(n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}^l \mathbf{w}_0$ に対する Power Method:

$$\lambda(n; q) = \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\frac{|\mathbf{w}_l(n)|}{|\mathbf{w}_0|} \right]^{1/l},$$

F.Morone, and H.A.Makse, Nature 524, 65-68, 2015.

min $\lambda(n; q)$ に関する $2l$ -体問題

min $\lambda(n; q)$ に関する $2l$ -体問題を Greedy に解くと, 順に除去するインフルエンサーは $Cl_l(i)$ 値が最大のノード i

$$|\mathbf{w}_2(n)|^2 = \sum_{i,j,k \neq i, l \neq j} A_{ij} A_{jk} A_{kl} (k_i - 1)(k_l - 1) n_i n_j n_k n_l,$$

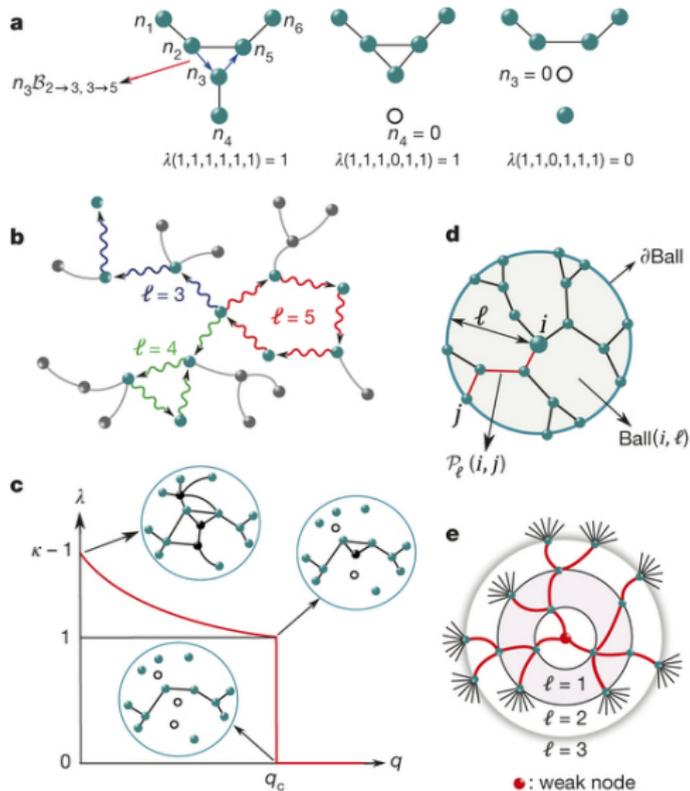
$$|\mathbf{w}_l(n)|^2 \approx \sum_{i=1}^N (k_i - 1) \sum_{j \in \partial \text{Ball}(i, 2l-1)} (\prod_{k \in P_{2l-1}(i,j)} n_k) (k_j - 1),$$

$$Cl_l(i) \stackrel{\text{def}}{=} (k_i - 1) \sum_{j \in \partial \text{Ball}(i, l)} (k_j - 1).$$

$P_{2l-1}(i, j)$ は $2l - 1$ ホップで i と j を繋ぐパス,
 $\partial \text{Ball}(i, l)$ は i から l ホップ先のノード集合

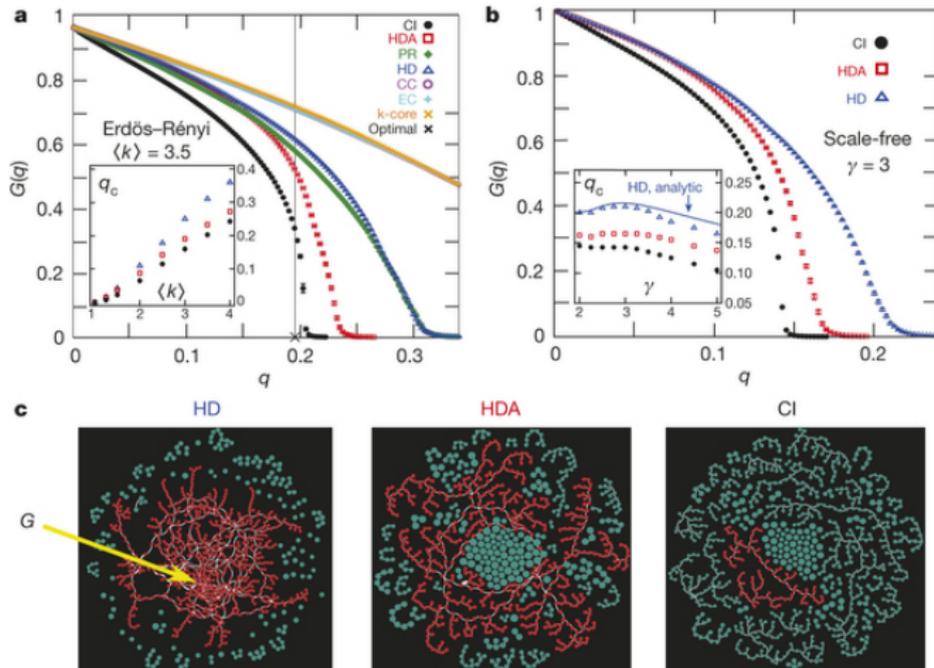
F.Morone, and H.A.Makse, Nature 524, 65-68, 2015.

CI: Collective Influence



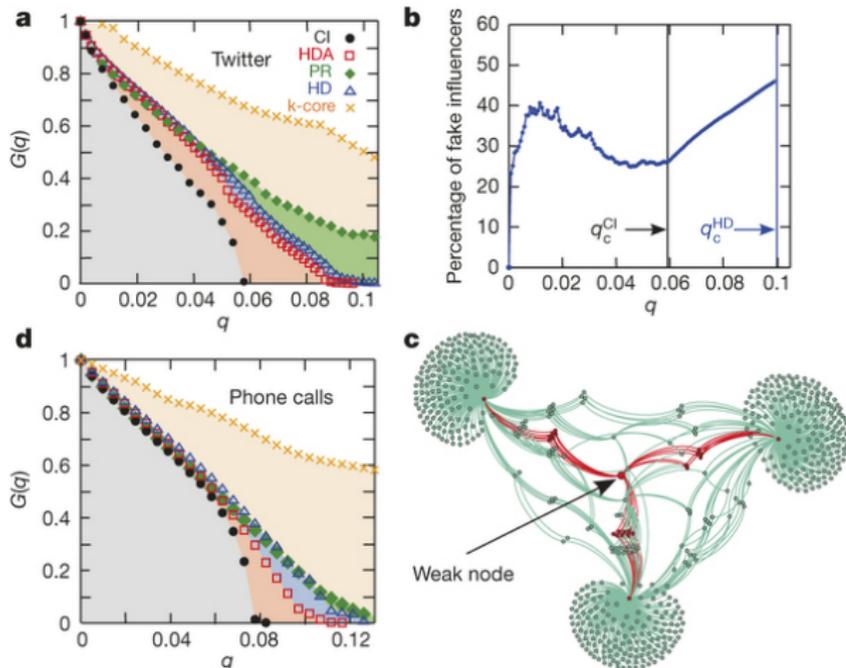
F.Morone, and H.A.Makse, Nature 524, 65-68, 2015.

新たな脅威：ハブ攻撃より深刻なCI攻撃



F.Morone, and H.A.Makse, Nature 524, 65-68, 2015.

Twitter 等でも



F.Morone, and H.A.Makse, Nature 524, 65-68, 2015.

2-2 多数決の情報伝搬 LTM

種 $n_i = 1$, $k_i - 1$ 本中で m_i 本が active なら $i \rightarrow j$ 伝搬

$$\nu_{i \rightarrow j} = n_i + (1 - n_i) \left[1 - \prod_{P_h \in P_{\partial i \setminus j}^{m_i}} (1 - \prod_{p \in P_h} \nu_{p \rightarrow i}) \right],$$
$$\nu_i = n_i + (1 - n_i) \left[1 - \prod_{P_h \in P_{\partial i}^{m_i}} (1 - \prod_{p \in P_h} \nu_{p \rightarrow i}) \right].$$

上記の線形近似 $\nu^{t+1} = \mathbf{n} + F^t \nu^t$, $F^t = \partial G / \partial \nu |_{\nu^t}$,

$F_{k \rightarrow l, i \rightarrow j}^t = (1 - n_i) I_{k \rightarrow l, i \rightarrow j}^t$ から **最大情報拡散の種** を順に選ぶ

$$CI-TM_1(i) = k_i + \sum_{j \in \partial i} (1 - n_j) \sum_{k \in \partial j \setminus i} I_{ijk}^0,$$

\vdots

$$I_{k \rightarrow l, i \rightarrow j} = 1 \text{ if } l = i, k \neq j, \sum_{p \in \partial i \setminus \{k, j\}} \nu_{p \rightarrow i} = m_i - 1.$$

S.Peï et al., [Scientific Reports 7, 45240, 3/28 2017.](#)

2-3 / ホップ先の恣意性がない Cl_p 攻撃

固有値問題 $L^T M = \lambda L^T$, $M R = \lambda R$ のメッセージ伝搬式

$$\text{incoming to } i: L_{i \rightarrow j}^t = \frac{1}{|L^t|} \sum_{k \in \partial i \setminus j} L_{k \rightarrow i}^{t-1} = \frac{1}{|L^t|} (L^T M)_{i \rightarrow j},$$

$$\text{outgoing from } j: R_{i \rightarrow j}^t = \frac{1}{|R^t|} \sum_{k \in \partial j \setminus i} R_{j \rightarrow k}^{t-1} = \frac{1}{|R^t|} (M R)_{i \rightarrow j}.$$

$$\delta \lambda = \frac{L(\delta M R)}{L^T R} = \frac{1}{L^T R} \sum_{i \rightarrow j, k \rightarrow l} L_{i \rightarrow j} \delta M_{i \rightarrow j, k \rightarrow l} R_{k \rightarrow l},$$

$k \rightarrow i \rightarrow j$, $k \leftarrow i \leftarrow j$, $i \rightarrow k \rightarrow j$, $i \leftarrow k \leftarrow j$ が i に関与

$$Cl_p(i) = \sum_{j, l} (L_{i \rightarrow j} R_{j \rightarrow l} + L_{j \rightarrow i} R_{i \rightarrow l}) + \sum_{k, j} L_{k \rightarrow j} R_{j \rightarrow i}.$$

F. Morone et al., Scientific Reports 6, 2016.

3. 情報拡散の最大化

友人知人や SNS のつながり等におけるネットワーク構造を与えたとき、初期状態 I の種ノードから以下の LT モデルと IC モデルに従って、各ノードが S, I, R 間の状態遷移を繰り返すものとして、情報または感染の拡散の度合いが数量的に調べられる。

LT (Linear Threshold) モデル: 情報受動者主導

各ノード i は、自身の隣接ノード $j \in \partial i$ がある閾値 m_i 以上の割合で I 状態のとき、 i は状態 S から状態 I に遷移する。

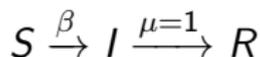
IC (Independent Cascade) モデル: 情報送信者主導

各ノード i はそれぞれの隣接ノード $j \in \partial i$ に、確率 p_{ij} で情報伝搬または感染して、 j が状態 S から状態 I に遷移する。特に、 $\mu = 1$, p_{ij} が一定値 β のとき SIR モデルに帰着する。

⇒ LT モデルと IC モデルには、頂点被覆 (VC: Vertex Cover) 問題や集合被覆 (SC: Set Cover) 問題がそれぞれ対応し、最適な種ノードを厳密に見つけるのは NP 困難。

3-1 サンプル平均不要のメッセージ伝搬法

SIR モデルでは、情報または感染の伝搬として、 $t = 0$ で初期状態 I の種ノードから接触感染により各々の隣接ノードにおいて確率 β で状態 S から I への遷移が時刻 $t = 1, 2, \dots$ で繰り返し行われる。



CI のメッセージ伝搬式に倣って、予め平均化された確率変数を考えれば、サンプル分の平均値化は不要となって高速化できる。

$$\begin{aligned} P_i^I(t+1) &= P_i^S(t) \left[1 - \prod_{j \in \partial i} (1 - \beta \times P_j^I(t)) \right], \\ P_i^R(t+1) &= P_i^R(t) + P_i^I(t), \\ P_i^S(t+1) &= 1 - P_i^I(t+1) - P_i^R(t+1). \end{aligned}$$

感染率 $\beta = \lambda \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$ と定めるのが現実的。

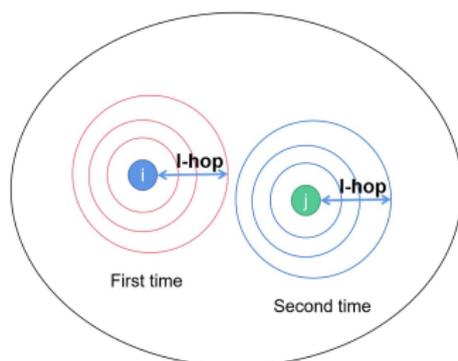
F.Liao, Y.Hayashi, Physica A 599(127427), 2022.

3-2 多数の種ノード選択

単一の種ノードよりも、複数の種ノードを設定する方が、より広くより素速く情報や感染が拡散すると考えられるが、互いに近いと、拡散の輪がすぐに重なり余り効果的でない。



そこで、種ノードが互いに遠くなるように選ぶ、 **l -ホップ被覆**を求める。



最小 l -ホップ被覆として

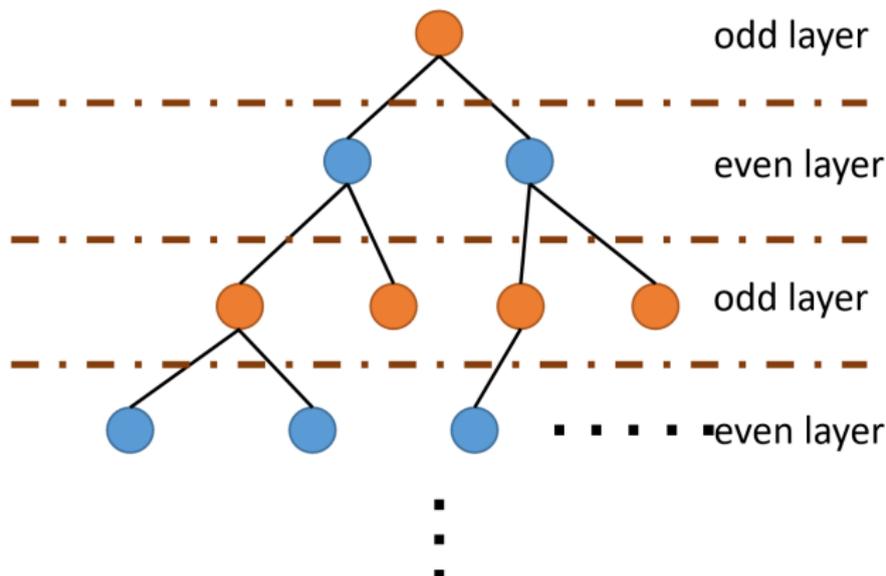
サーベイ伝搬法による VC や確率伝搬法による FVS を適用.

- Step0:** 対象とするネットワークを与え, 種ノード数 $N_s = 0$ と初期設定する.
- Step1:** 最小 VC の最有力候補を種ノードに設定して, $N_s \leftarrow N_s + 1$ と更新する.
- Step2:** 上記の種ノード s と, そこから $l-1$ -ホップ先のノード ($\partial Ball(s, l-1)$ 先) までを被覆内として間引いて除去する. それらノードの接続リンクも除去される.
- Step3:** 全て除去されるまで, 残った部分に対して Step1,2 を繰り返す. 最終的に得られた N_s 値が種ノード数となる.

部分木からの VC 抽出

互いに多項式変換可能： $FVS \leftrightarrow VC$

但し, FVS を除いた各部分木において, 奇偶階層のどちらか少ないノード数で VC をヒューリスティックに定める.



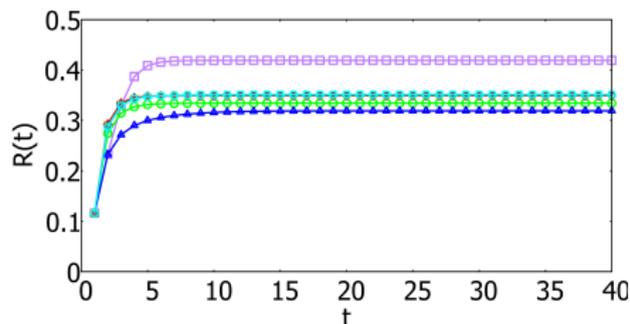
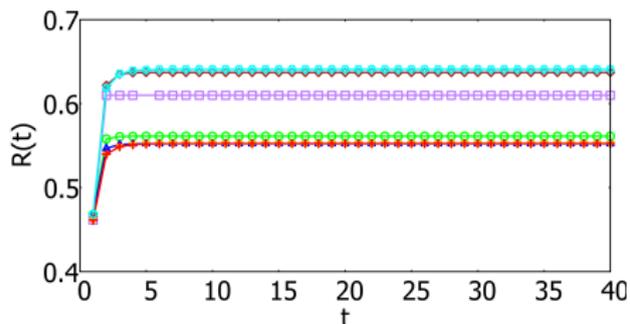
3-3 数値実験例

ある社会ネットワークの実データに対する, 近似解のサイズ比較

逆温度 x	0	0.5	1	2	3	5	7
SP 法の $ VC $	3520	3510	3517	3510	3508	3511	3507
$ VC /N$	0.462	0.460	0.461	0.460	0.460	0.461	0.460
BP 法の $ VC $	3520	3514	3516	3519	3515	3523	3524
$ VC /N$	0.462	0.461	0.461	0.461	0.461	0.462	0.462
2-近似法の $ VC $				5498			
$ VC /N$				0.721			

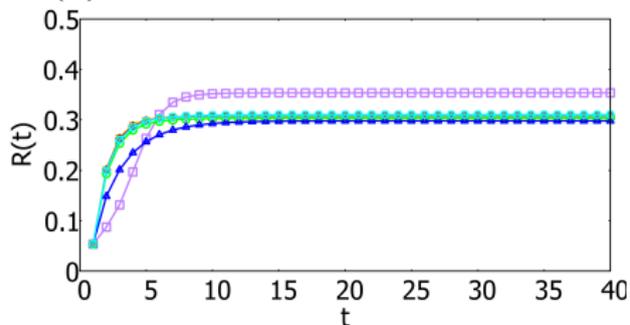
F.Liao, Y.Hayashi, Physica A 599(127427), 2022.

既存の種選択との比較: 累積感染割合 $R(t)$ の時間変化

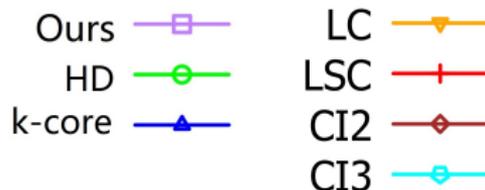


(a) VC: $l = 1$ -hops, $N_s = 3517$

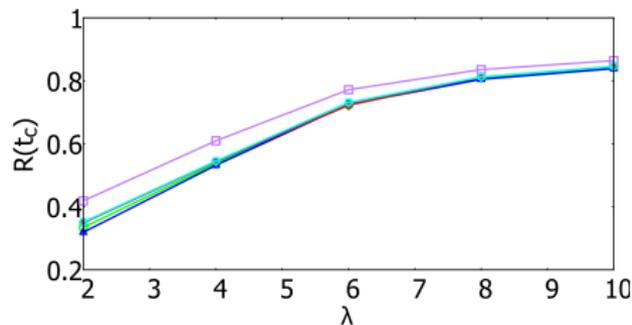
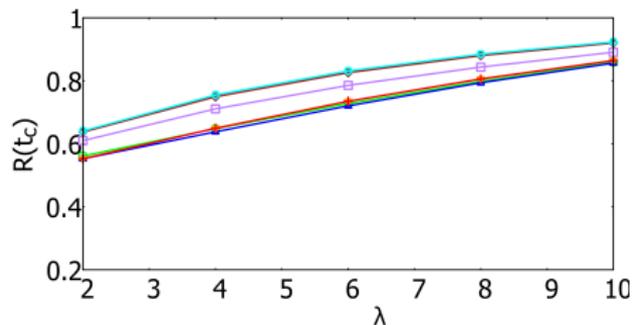
(b) $l = 2$ -hops, $N_s = 885$



(c) $l = 4$ -hops, $N_s = 407$

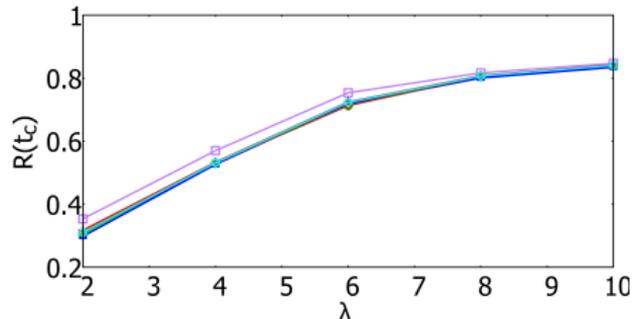


感染率 $\beta = \lambda \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$ vs 収束時の累積感染割合 $R(t_c)$

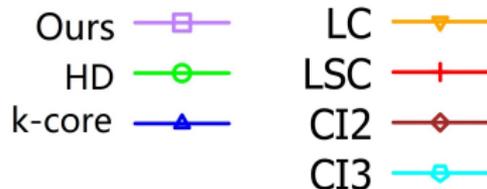


(a) VC: $l = 1$ -hops, $N_s = 3517$

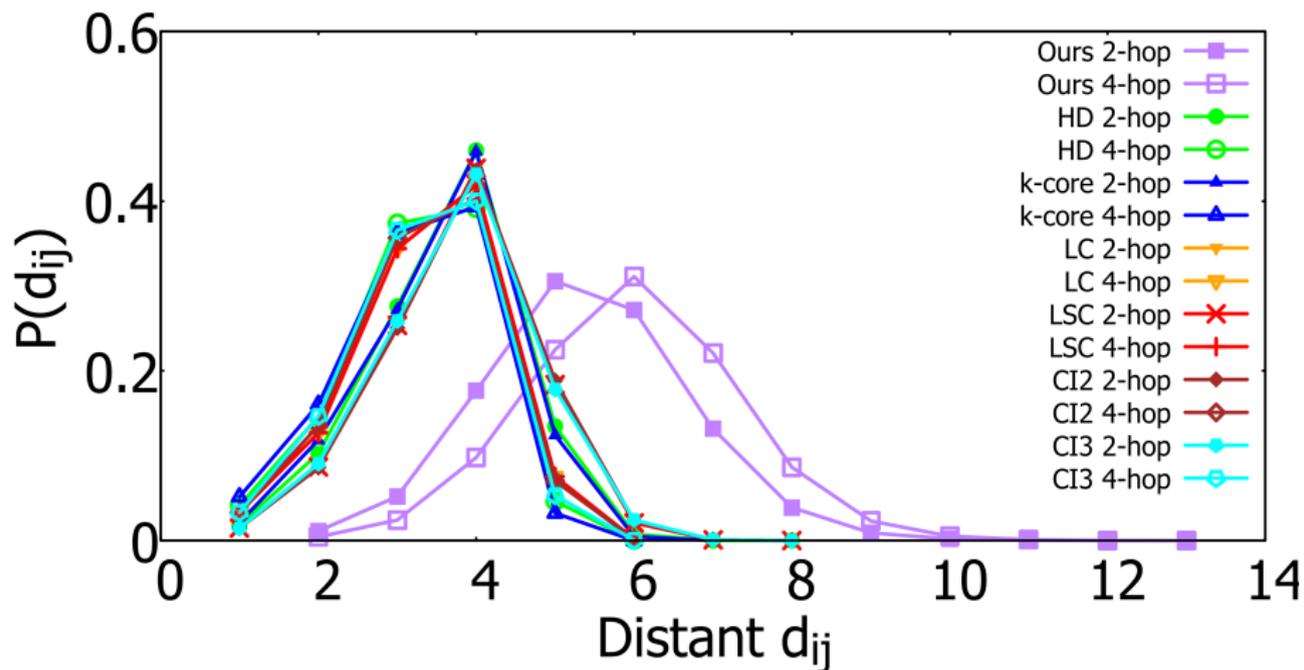
(b) $l = 2$ -hops, $N_s = 885$



(c) $l = 4$ -hops, $N_s = 407$



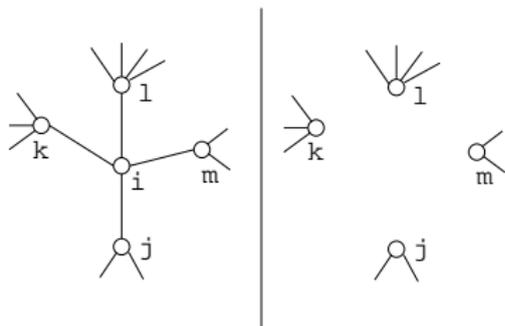
種ノード間の距離



F.Liao, Y.Hayashi, Applied Network Science 7(52), 2022.

4. Cavity(空洞) グラフによる近似解法

Bethe-Peierls 近似:
独立積



joint prob.

$$\mathcal{P}_{\setminus i}(A_j : j \in \partial i) \approx \prod_{j \in \partial i} q_{j \rightarrow i}^{A_j}$$

- ① $A_i = 0$: i は非占有の状態: 木の根として不要
⇒ 木以外のループ形成の為のノード
- ② $A_i = i$: i 自身が根. i が追加結合された時, 隣接 $j \in \partial i$ の状態 $A_j = j$ は, i が j の根の状態 $A_j = i$ に変化可
- ③ $A_i = l$: i が追加結合された時, ある隣接 $l \in \partial i$ が存在して, 他の全ての $k \in \partial i$ が非占有 or 根なら, l が i の根

H.-J.Zhou, Euro.Phys. J. B 86, 2013.

4-1 最小FVSを求める確率伝搬法

最小フィードバック頂点集合 (Feedback Vertex Set) 問題の近似解法

- ① i が非占有の確率: $q_i^0 = \frac{1}{z_i}$,
- ② j が非占有 or 根で, i が根の確率:

$$q_i^j = \frac{e^x \prod_{j \in \partial i} (q_{j \rightarrow i}^0 + q_{j \rightarrow i}^j)}{z_i},$$

- ③ l が占有かつ他の k は非占有 or 根で, i の根が l の確率:

$$q_i^l = \frac{e^x (1 - q_{l \rightarrow i}^0) \prod_{k \in \partial i} (q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k)}{z_i},$$

正規化条件 $q_i^0 + q_i^j + \sum_{l \in \partial i} q_i^l = 1$ より

$$z_i \stackrel{\text{def}}{=} 1 + e^x \left[\prod_{j \in \partial i} (q_{j \rightarrow i}^0 + q_{j \rightarrow i}^j) + \sum_{l \in \partial i} (1 - q_{l \rightarrow i}^0) \prod_{k \in \partial i \setminus l} (q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k) \right].$$

BP 更新式

右辺は積和型式 (product-sum) であることに注意！

$$q_{i \rightarrow j}^0 = \frac{e^{-x}}{z_{i \rightarrow j}^{FVS}(t)}, \quad (1)$$

$$q_{i \rightarrow j}^i = \frac{\prod_{k \in \partial i \setminus j} (q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k)}{z_{i \rightarrow j}^{FVS}}, \quad (2)$$

$$q_{i \rightarrow j}^l = \frac{(1 - q_{l \rightarrow i}^0) \prod_{k \in \partial i \setminus j, l} (q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k)}{z_{i \rightarrow j}^{FVS}}, \quad l \in \partial i \setminus j, \quad (3)$$

$$z_{i \rightarrow j}^{FVS} \stackrel{\text{def}}{=} e^{-x} + \left\{ \prod_{k \in \partial i \setminus j} (q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k) \times \left(1 + \sum_{l \in \partial i \setminus j} \frac{1 - q_{l \rightarrow i}^0}{q_{l \rightarrow i}^0 + q_{l \rightarrow i}^l} \right) \right\}, \quad (4)$$

最小 FVS における自由エネルギー最小化

BP 更新式の平衡点は、以下の自由エネルギー F^{FVS} の最小化に対応する。

$$F^{FVS} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \Phi_i^{FVS} - \sum_{i,j} \alpha_{ij} \Phi_{ij}^{FVS}, \quad (5)$$

$$\Phi_i^{FVS} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{x} \ln \left[e^{-x} + \prod_{k \in \partial i} \left(q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k \right) + \sum_{l \in \partial i} (1 - q_{l \rightarrow i}^0) \prod_{k \in \partial i \setminus l} \left(q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k \right) \right], \quad (6)$$

$$\Phi_{ij}^{FVS} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{x} \ln \left[\left(q_{j \rightarrow i}^0 + q_{j \rightarrow i}^j + \sum_{l' \in \partial j \setminus i} q_{j \rightarrow i}^{l'} \right) q_{i \rightarrow j}^0 + \left(q_{j \rightarrow i}^0 + q_{j \rightarrow i}^j + \sum_{l' \in \partial j \setminus i} q_{j \rightarrow i}^{l'} \right) q_{i \rightarrow j}^i + \sum_{l \in \partial i \setminus j} \left(q_{j \rightarrow i}^0 + q_{j \rightarrow i}^j \right) q_{i \rightarrow j}^l \right]. \quad (7)$$

BP 更新式の平衡点

式 (5)(6)(7) に従った自由エネルギーの極小点

$$\frac{\partial (x^{FVVS})}{\partial q_{j \rightarrow i}^0} = 0, \quad \frac{\partial (x^{FVVS})}{\partial q_{j \rightarrow i}^j} = 0, \quad \frac{\partial (x^{FVVS})}{\partial q_{j \rightarrow i}^{l'}} = 0, \quad l' \in \partial j \setminus i, \quad (8)$$

は、上記の式 (5)(6)(7) から導かれる各成分として、

$$\frac{\text{式 (1) 右辺分子}}{\Phi_i^{FVS} \text{の右辺 ln 中部分}} - \alpha_{ij} \frac{q_{i \rightarrow j}^0}{\Phi_{ij}^{FVS} \text{の右辺 ln 中部分}} = 0, \quad (9)$$

を満たすとき、すなわち、BP 更新式 (1) の平衡点で与えられる (式 (2)(3) も同様)。ここで、

$$\alpha_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Phi_{ij}^{FVS} \text{の右辺 ln 中部分} \times z_{ij}^{FVS}}{\Phi_i^{FVS} \text{の右辺 ln 中部分}},$$

とした上式右辺は BP 更新式 (1)(2)(3) の平衡点の値で定義される。

確率伝搬法とループ破壊のBP攻撃

数ラウンド反復からなる毎ステップ t で、**確率伝搬法 (BP)** に従う q_i^0 が最大のノードを除去すると、**ループ破壊の最悪攻撃**になる。

$$q_i^0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + e^x \left[\sum_{k \in \partial i(t)} \frac{1 - q_{k \rightarrow i}^0}{q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k} \prod_{j \in \partial i(t)} \left[q_{j \rightarrow i}^0 + q_{j \rightarrow i}^j \right] \right]}$$

$$q_{i \rightarrow j}^0 = \frac{1}{z_{i \rightarrow j}(t)}, \quad q_{i \rightarrow j}^j = \frac{e^x \prod_{k \in \partial i(t) \setminus j} \left[q_{k \rightarrow i}^0 + q_{k \rightarrow i}^k \right]}{z_{i \rightarrow j}(t)},$$

$$q_{i \rightarrow j}^0 + q_{i \rightarrow j}^j + \sum_{l \in \partial i} q_{i \rightarrow j}^l = 1,$$

$\partial i(t)$ は時刻 t における i の隣接ノード集合, $\partial i(t) \setminus j$ は $\partial i(t)$ から j を除いた集合, $x > 0$ は逆温度パラメータ.

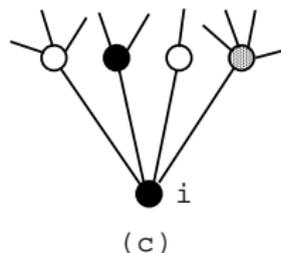
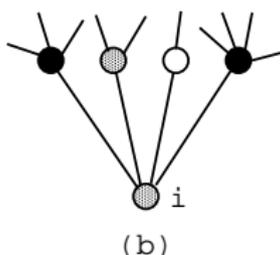
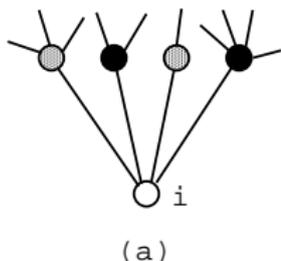
S.Mugisha, H.-J.Zhou, Phys.Rev. E 94, 2016.

4-2 最小VCを求めるサーベイ伝搬法

最小頂点被覆 (Vertex Cover) 問題の近似解法

VC: 各辺の両端ノードの少なくとも片方は被覆状態になる必要があることから, 各ノード i の状態はその隣接ノードの状態に応じて場合分け.

- (a) 隣接ノードに非被覆が1つも存在しないとき, i は非被覆状態 0: 白色で良い.
- (b) 隣接ノードに非被覆が1つだけ存在するとき, i はジョーカー状態 *: 灰色とする.
- (c) 隣接ノードに非被覆が2つ以上存在するとき, i は被覆状態 1: 黒色になるべき.



SP 更新式

メッセージ伝搬による各確率の右辺から左辺への SP 更新式

$$\pi_i^0 = \frac{\prod_{j \in \partial i} (1 - \pi_{j \rightarrow i}^0)}{z_i^{VC}},$$

$$\pi_i^* = \frac{e^{-x} \sum_{j \in \partial i} \pi_{j \rightarrow i}^0 \prod_{j' \in \partial i \setminus j} (1 - \pi_{j' \rightarrow i}^0)}{z_i^{VC}},$$

$$\pi_i^1 = \frac{e^{-x} \left[1 - \prod_{j \in \partial i} (1 - \pi_{j \rightarrow i}^0) - \sum_{j \in \partial i} \pi_{j \rightarrow i}^0 \prod_{j' \in \partial i \setminus j} (1 - \pi_{j' \rightarrow i}^0) \right]}{z_i^{VC}},$$

但し、正規化条件 $\pi_i^0 + \pi_i^* + \pi_i^1 = 1$ より、

$$z_i^{VC} \stackrel{\text{def}}{=} e^{-x} \left[1 - (1 - e^x) \prod_{j \in \partial i} (1 - \pi_{j \rightarrow i}^0) \right].$$

e^{-x} は最小 VC のためのペナルティ項、 x は逆温度パラメータ。

SP 更新式 (続き)

右辺は積和型式 (product-sum) であることに注意!

$$\pi_{i \rightarrow j}^0 = \frac{\prod_{k \in \partial i \setminus j} (1 - \pi_{k \rightarrow i}^0)}{z_{ij}^{VC}}, \quad (10)$$

$$\pi_{i \rightarrow j}^* = \frac{e^{-x} \sum_{k \in \partial i \setminus j} \pi_{k \rightarrow i}^0 \prod_{k' \in \partial i \setminus j, k} (1 - \pi_{k' \rightarrow i}^0)}{z_{ij}^{VC}},$$

$$\pi_{i \rightarrow j}^1 = \frac{e^{-x} \left[1 - \prod_{k \in \partial i \setminus j} (1 - \pi_{k \rightarrow i}^0) - \sum_{k \in \partial i \setminus j} \pi_{k \rightarrow i}^0 \prod_{k' \in \partial i \setminus j, k} (1 - \pi_{k' \rightarrow i}^0) \right]}{z_{ij}^{VC}},$$

$$z_{ij}^{VC} \stackrel{\text{def}}{=} e^{-x} \left[1 - (1 - e^x) \prod_{k \in \partial i \setminus j} (1 - \pi_{k \rightarrow i}^0) \right].$$

最小 VC における自由エネルギー最小化

SP 更新式 (10) の平衡点は, 以下の自由エネルギー F^{VC} の極小点を与える.

$$F^{VC} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \Phi_i^{VC} - \sum_{i,j} \beta_{ij} \Phi_{ij}^{VC}, \quad (11)$$

$$\Phi_i^{VC} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{X} \ln [\prod_{k \in \partial i} (1 - \pi_{k \rightarrow i}^0)], \quad (12)$$

$$\Phi_{ij}^{VC} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{X} \ln [\pi_{j \rightarrow i}^0 \pi_{i \rightarrow j}^0]. \quad (13)$$

SP 更新式の平衡点

式 (11)(12)(13) に従った自由エネルギーの極小点

$$\frac{\partial (x F^{VC})}{\partial \pi_{j \rightarrow i}^0} = 0,$$

は, 上記の式 (11)(12)(13) から導かれる成分として

$$\frac{\text{式 (10) 右辺分子}}{\Phi_i^{VC} \text{の右辺 ln 中部分}} - \beta_{ij} \frac{\pi_{i \rightarrow j}^0}{\Phi_{ij}^{VC} \text{の右辺 ln 中部分}} = 0,$$

を満たす, SP 更新式 (10) の平衡点で与えられる. ここで,

$$\beta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Phi_{ij}^{VC} \text{の右辺 ln 中部分} \times z_{ij}^{VC}}{\Phi_i^{VC} \text{の右辺 ln 中部分}},$$

とした上記右辺は SP 更新式 (10) の平衡点の値で定義される.