

構造と伝わりやすさ

林 幸雄

北陸先端科学技術大学院大学

改訂第 3 版 2024

1. パーコレーション：浸透

ビンゴカードと破れた魚網（小さな穴が繋がると.. ）



<http://ryokichi.com/blog-entry-208.html>

浸透印：気孔の繋がり

インキ浸透印の構造図

ボディ内部の、
無数の連続気孔を持つ
特殊なスポンジ体で
多量のインキを内蔵しています。
印面は特殊耐油性ゴム
(印面に近づくにつれて
気孔が細くなるゴム)を採用。
つねに最適な量のインキがしみ込むようになっています。

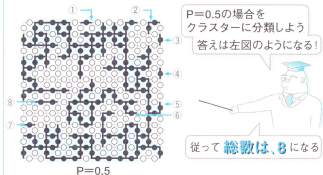
(シヤチハタ社より抜粋)



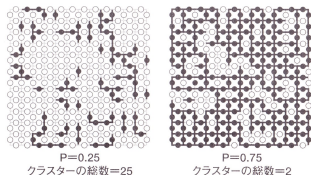
http://bunyoudou.co.jp/the_shachihata

正方格子の場合

クラスターはいくつ？

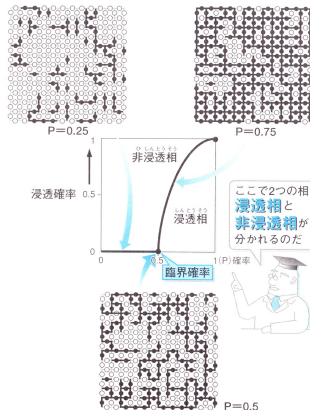


次の場合のクラスターの総数を数えてみよう！



171

浸透相と非浸透相



179

いろいろな二次元格子の場合

3. パーコレーション

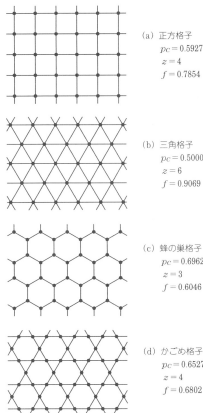


図14 二次元平面上のいくつかの格子。 p_c はサイト過程の浸透閾値、 z は配位数、 f は充填率（第7章参照）である。

3 いろいろな二次元格子

目であることが示される。これが前に述べた基石の問題と等価であることは容易に理解できよう。黒石を開いた栓に見立て、黒石のつながりを見ていると思えばよい。

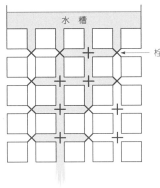


図13 水道管のつなぎ目に栓を備えた水道管のネットワークによるサイト過程

ようになる。鋭い読者はすでに気づかれたであろうが、これは第1章で見たビンゴゲームと同類の問題である。唯一の違いは、ビンゴゲームでは縦、横、斜めいずれかの方向の直線的なつながりができればよかったが、ここでは直線的でなくともよいが上下方向のつながりがあるかないかが問題となることである。何回も実験をくり返すとおよそ六〇パーセントくらいが通水されるかされないかの境

2 水道管のネットワーク

基石を並べる代りに、もつと身近な例として水道管のネットワークを考えよう。図13のような水道管の掛盤の目状のネットワークで、各つなぎ目には栓が備えられている。上部につながつた水槽に水を張り、栓を順次開けていく。やがて、ある程度の栓が開けられると下から水が出てくるようになる。

頑健性指標

一様ランダムにあるいは確率的に標的を選んで占有ノードが浸透していくのがパーコレーション

$$\text{ノード占有率 } p \Leftrightarrow \text{ノード除去率 } q = 1 - p$$

浸透相 $\leftrightarrow$ 非浸透相との臨界値 p_c (あるいは q_c) が同じでも相転移が緩やか or 急峻かで変化の度合いが異なる為, この違いを測る指標が必要
頑健性指標:

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{q=1/N}^1 \left(\frac{S(q)}{N} \times \frac{1}{N} \right).$$

$S(q)$ は除去率 q において GC に含まれるノード数: 最大連結成分のサイズ
 $\Rightarrow$ 連結成分のサイズはラベリング法で求まれば良い

パーコレーションの数値解析

ネットワークにおいて、ある割合 q だけ故障や攻撃等でノードが正常に機能しなくなったとして、それらのノードを除いた連結領域（クラスタ）の大きさを計る。ノード除去の割合 q を高めるに従って複数の孤立した連結領域ができるが、システム内で生き残っている $S(q)$ 個のノードからなる最大連結成分 GC が崩壊する臨界点 q_c が特に着目される。

この臨界点で $S(q)$ が急減して GC が崩壊すると、二番以降の大きさの孤立クラスタの平均サイズ $\langle s(q) \rangle$ が増大してピーク値を示す。より大きな臨界値 q_c を持つ中で、 q の増加に対して $S(q)$ の減少がより緩やかなほど、故障や攻撃に耐えて多くのノードが繋がって頑健性が高い。

2. 理論解析：Generating function

次数 k をもつノードの $\forall P(k)$ に対する母関数を考えると、リンク先の 1 個のノードが x に対応する.

$$G_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k P(k)x^k, \quad G'_0(x) = \sum_k kP(k)x^{k-1}.$$

例えば, ポアソン分布 $P(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ の平均値は,

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} x^k = e^{\lambda(x-1)},$$

$$\langle k \rangle = G'_0(1) = \left[\frac{d}{dx} e^{\lambda(x-1)} \right]_{x=1} = \lambda.$$

林編著 ネットワーク科学の道具箱, 第 4 章, 近代科学社, 2007

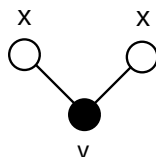
Generating function (cont.)

あるノード v に隣接する v' が次数 k である確率 $kP(k)$: リンク選択

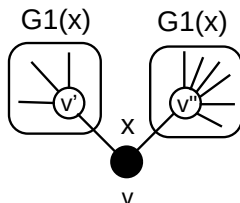
$$\frac{\sum_k kP(k)x^k}{\sum_j jP(j)} = x \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)} \stackrel{\text{def}}{=} xG_1(x).$$

$\forall$ ノードから距離 2 のノード数 : 木上の再帰表現

$$G_0(G_1(x)) = \sum_k P(k) [G_1(x)]^k.$$



(a) 1 step



(b) 2 step

Cluster size

あるランダム選択リンクからのクラスタサイズ S に関する母関数 $H_1(x) = \sum \mathcal{P}_1(s)x^s$ は,

$$H_1(x) = xG_1(H_1(x)),$$

ランダム選択ノードの場合も同様に,

$$H_0(x) = xG_0(H_1(x)).$$

$G_0(1) = G_1(1) = 1$, $H_1(1) = G_1(H_1(1)) = 1$, $H'_1(1) = 1/(1 - G'_1(1))$ より, 平均クラスタサイズは,

$$\langle S \rangle = H'_0(1) = 1 + \frac{G'_0(1)}{1 - G'_1(1)}.$$

$N \rightarrow \infty$ で $\langle S \rangle \rightarrow \infty : G'_1(1) = 1 \Leftrightarrow$ 条件 $\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle = 2$.

ランダム占有率 q の $\forall P(k)$ における実効的な次数分布

$$\bar{P}(\bar{k}) = \sum_{k=\bar{k}}^{\infty} P(k)_k C_{\bar{k}} q^{\bar{k}} (1-q)^{k-\bar{k}},$$

$$\langle \bar{k} \rangle = \sum_{\bar{k}} \bar{k} \bar{P}(\bar{k}) = \sum_n n P(n) q = \langle k \rangle q.$$

$\bar{k} = 1:$	$P(1)_1 C_1 q (1-q)^0$	$+ P(2)_2 C_1 q (1-q)^{2-1}$	$+ P(3)_3 C_1 q (1-q)^{3-1}$	$+ \dots$
$\bar{k} = 2:$		$2 P(2)_2 C_2 q^2 (1-q)^0$	$+ 2 P(3)_3 C_2 q^2 (1-q)^{3-2}$	$+ \dots$
$\bar{k} = 3:$			$3 P(3)_3 C_3 q^3 (1-q)^0$	$+ \dots$
$+$				$\vdots$
	$P(1)q$	$+ 2P(2)q$	$+ 3P(3)q$	$+ \dots$

ランダム故障への強結合耐性

$$\langle \bar{k}^2 \rangle = \sum_{\bar{k}} \bar{k}^2 \bar{P}(\bar{k}) = \langle k^2 \rangle q^2 + \langle k \rangle q(1 - q).$$

巨大連結成分 GC が出来る条件式より, 臨界値 q_c は,

$$2 = \frac{\langle \bar{k}^2 \rangle}{\langle \bar{k} \rangle} = \frac{q_c(\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle) + \langle k \rangle}{\langle k \rangle},$$

$$q_c = \frac{1}{\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle - 1}.$$

現実の SF ネットでは, べき指数は $2 < \gamma < 3$ なので,

$$\langle k^2 \rangle = \sum k^2 P(k) \sim \sum k^{2-\gamma} \rightarrow \infty, \quad q_c \rightarrow 0:$$

強結合耐性 (不可避なウィルス拡散)

R.Cohen et al., Phys.Rev.Lett., 2000.

別解法

GC が出るには, あるノード i が j に結合する条件付きで, i の平均次数が最低 2 であることより,

$$\langle k_i | i \leftrightarrow j \rangle = \sum_{k_i} k_i P(k_i | i \leftrightarrow j) = 2.$$

$P(k_i | i \leftrightarrow j) = P(i \leftrightarrow j | k_i) P(k_i) / P(i \leftrightarrow j)$ を用い,
 $P(i \leftrightarrow j | k_i) = k_i / (N - 1)$, $P(i \leftrightarrow j) = \langle k \rangle / (N - 1)$ より,

$$\sum_{k_i} k_i P(k_i | i \leftrightarrow j) = \sum_{k_i} k_i \frac{N - 1}{\langle k \rangle} \frac{k_i}{N - 1} P(k_i).$$

ゆえに, $\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle = 2$.

R.Cohen et al., Chapter 4, In S. Bornholdt, and H.G. Svchster Eds. Handbook of Graphs and Networks, 2003, WILEY-VCH.

4. SIS, SIR Models

感染流行モデルにおける各ノードの状態遷移



風土病：一定人口 (出生死亡率) や一様な接触感染を仮定
従来のモデルでは、感染率 ρ がしきい値以下なら拡大しない

⇒ 現代では、長距離の移動手段、局所的に集中する人々、人ごとに偏った接触機会

Kermack-McKendrick の SIS モデル

古典的な Kermack-McKendrick(1927) の SIS モデルでは単純化して、一定人口における一様な接触機会：繋がり方で一定割合の感染率 β を考える。

$$s + i = 1,$$

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si + \gamma i, \quad \frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i.$$

$$\frac{1}{i} + \frac{\beta}{-\beta i + (\beta - \gamma)} = \frac{\beta - \gamma}{i(-\beta i + (\beta - \gamma))},$$

を用いて、 $\frac{di}{dt} = \beta(1-i)i - \gamma i$ を変数分離型として積分して解くと、

$$\ln i - \ln(\beta i - (\beta - \gamma)) = (\beta - \gamma)t + C,$$

$$i(t) = \frac{(\gamma - \beta)e^{(\beta - \gamma)t}}{e^{-C} - \beta e^{(\beta - \gamma)t}} \rightarrow \frac{\beta - \gamma}{\beta} \quad (t \rightarrow \infty, \beta > \gamma).$$

もし弱い感染力 ($\beta < \gamma$) なら $i(t)$ は単調減少で感染は広がらない
→ 現実の人々の接触感染では誤り

Absence of the Threshold on SF Net

人の繋がりを表す SF ネット上の SIS モデルにおける次数 k を持つノードごとの感染密度 ρ_k を考える.

$$\dot{\rho}_k(t) = -\rho_k(t) + \lambda k(1 - \rho_k(t))\Theta(t), \quad s_k(t) + \rho_k(t) = 1.$$

感染の平均場近似 $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \frac{kP(k)\rho_k}{\langle k \rangle}$ に, $\dot{\rho}_k = 0$ の平衡解 $\rho_k = \frac{\lambda k \Theta}{1 + \lambda k \Theta}$ を代入して $\Theta = f(\Theta)$ として表す.

条件 $\exists \rho_k \neq 0$ は, $\frac{df(\Theta)}{d\Theta}|_{\Theta=0} \geq 1$ と等価.

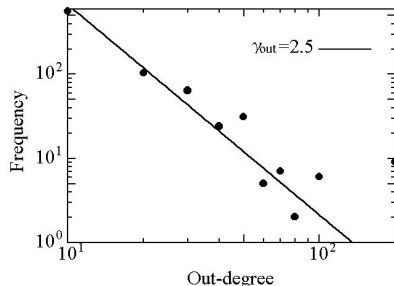
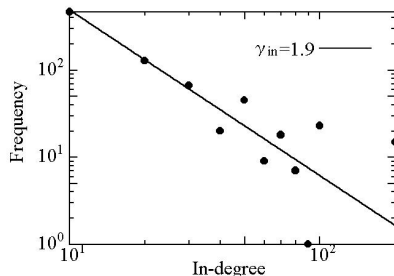
ゆえに, 感染流行のしきい値 λ_c は,

$$\lambda_c < \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} \sim \frac{1}{\ln N} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

R.P.-Satorras and A.Vespignani, Phys.Rev. E 63, 066117, 2001

現実の電子メールの送受信関係は SF ネットワーク

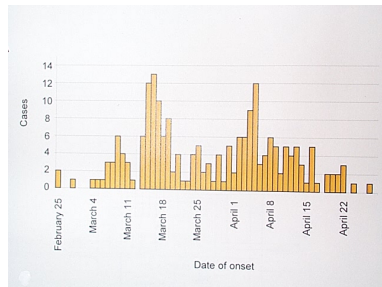
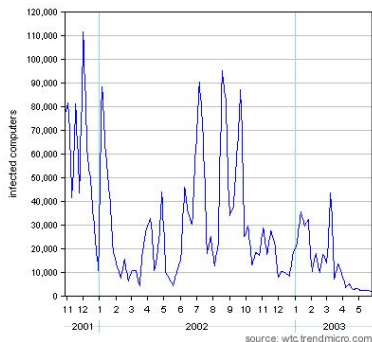
⇒ 従来の格子上あるいは一様ランダムな接触ではない!



World Internet Projects 日本調査より (H12 10-11, 2555 人)

Epidemic Spreading

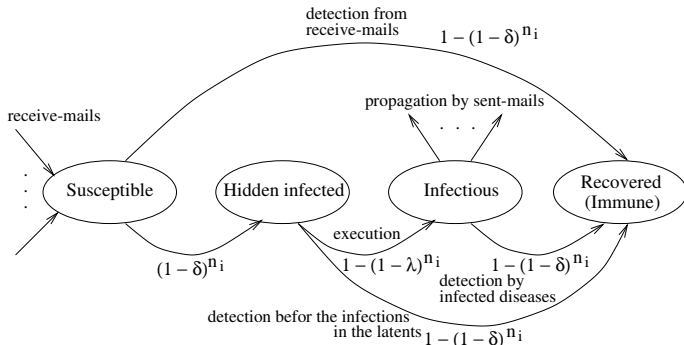
典型的に観測される再流行現象



SARS in Singapore, Sciencexpress
May 23, 2003

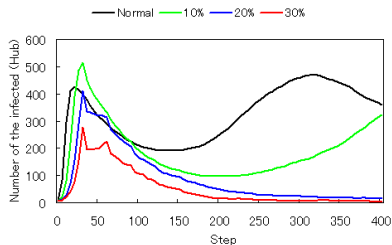
Stochastic Model

確率的な SHIR 状態遷移を, 電子メール送受信の SF ネット上でシミュレート

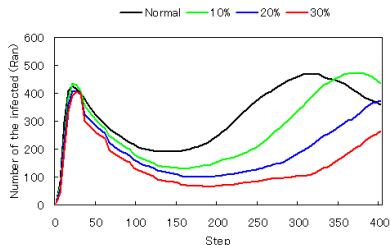


林, 箕浦, 松久保, 情処論 Vol.44, SIG(TOM9), 2003

重点的な免疫化と隔離の意味



ハブ免疫化



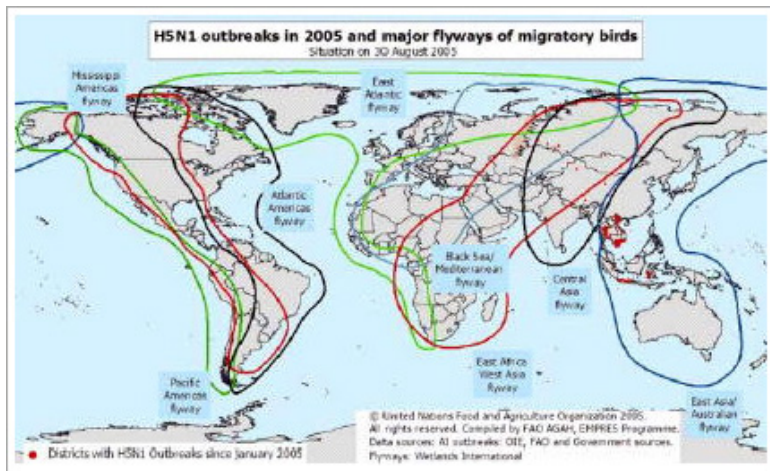
ランダム免疫化

確率的 SHIR 推移モデルで、30 ステップ（1ヶ月に相当）ごとに、成長した規模の 10, 20, 30 % の頂点を免疫化した場合の、感染数の平均値。

ハブ免疫率 30 % で絶滅！, ランダム免疫で再流行

林, 箕浦, 松久保, 情報論 Vol.44, SIG(TOM9), 2003, Y.Hayashi et al., Phys.Rev. E 69, 016112, 2004.

パンデミック：感染爆発の脅威



鳥インフルエンザの発生状況

<http://www.fao.org/japan/portal-sites/avian-flu/related-information/status-of-occurrence/en/>