

地理的空間上のネットワーク 自己組織化

林 幸雄

北陸先端科学技術大学院大学

yhayashi@jaist.ac.jp

第4回 複雑システムのネットワーク科学研究会, Nov. 29, 2010

目次

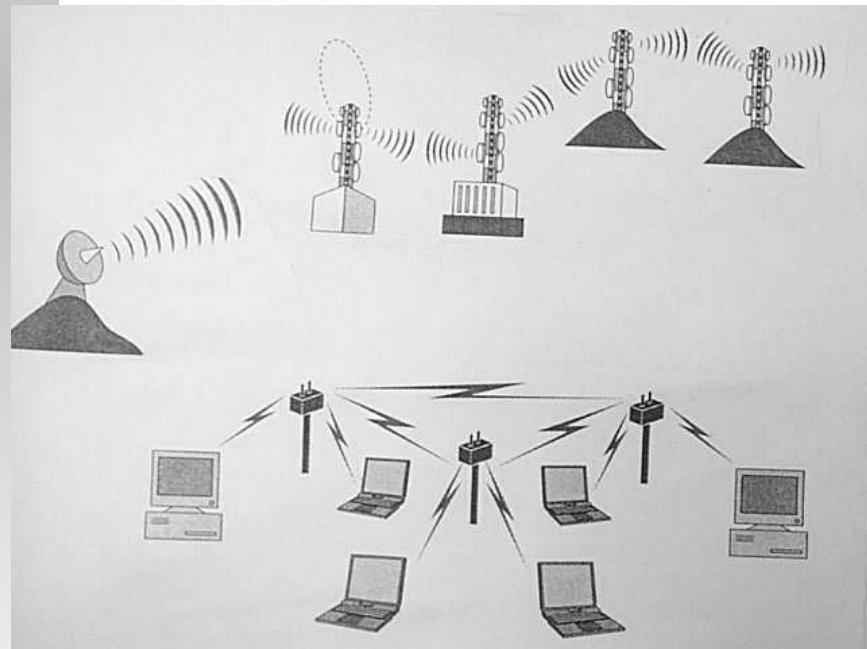
-複雑ネットワーク研究のサーベイと最新動向-
地理的空間上のモデルは国際的研究の前線上

1. 現実に潜むSFネットワーク
2. 空間上のネットワーク特性
→ 地理的制約による結合耐性の脆弱化
3. ショートカット効果による改善
-遠距離交際と近所づきあいのバランス-
4. 幾何学的細分による自己組織化ネット
5. マルコフ連鎖とフラクタル解析

0. 近未来アドホックネット構築

効率的かつ耐性が強いネットワークをどう設計?

有線と無線の混在, ITS など移動体, 大規模複雑化



非一様性 人口や経済活動に依存した現実的なノード(基地局)配置や通信要求

自律分散 部分的な成長, 局所情報のみで処理

広域無線 指向性やビーム強度の制御, 電波干渉回避(平面性), 長距離リンクの抑制

1. 現実に潜むSFネットワーク

多くの複雑なネットワークに共通する SF 構造

インフラ技術: 航空路線, インターネット, WWW,
電力網, P2P, 電子回路網

社会関係: 企業間取引, 知人, 映画の共演, 論文引用,
性的接触, 電子メール送受信数, 言語

生物系: 神経回路網, 遺伝子や代謝反応, 食物連鎖

べき乗則 $P(k) \sim k^{-\gamma}$, $2 \leq \gamma \leq 3$ は現実のネットワークに普遍的に存在し, その生成原理は単純で自然な 成長と優先的結合 による.

A.L. Barabási et al., Physica A, 272, 1999

パーコレーション解析

GCが出来るには, あるノード*i*が*j*に結合する条件付きで, *i*の平均次数が最低2であることより,

$$\langle k_i | i \leftrightarrow j \rangle = \sum_{k_i} k_i P(k_i | i \leftrightarrow j) = 2.$$

$P(k_i | i \leftrightarrow j) = P(i \leftrightarrow j | k_i) P(k_i) / P(i \leftrightarrow j)$ を用い,
 $P(i \leftrightarrow j | k_i) = k_i / (N - 1)$, $P(i \leftrightarrow j) = \langle k \rangle / (N - 1)$
より,

$$\sum_{k_i} k_i P(k_i | i \leftrightarrow j) = \sum_{k_i} k_i \frac{N - 1}{\langle k \rangle} \frac{k_i}{N - 1} P(k_i).$$

ゆえに, $\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle = 2$. 母関数法でも同様.

R.Cohen et al., Chapter 4, In S. Bornholdt, and H.G. Schuster Eds.

ランダム故障への頑健性

占有率 q の $\forall P(k)$ における実効的な次数分布

$$\bar{P}(\bar{k}) = \sum_{k=\bar{k}}^{\infty} P(k)_k C_{\bar{k}} q^{\bar{k}} (1-q)^{k-\bar{k}}.$$

GC が出来る条件式 $\frac{\langle \bar{k}^2 \rangle}{\langle \bar{k} \rangle} = 2$ より, 臨界値:

$$q_c = \frac{1}{\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle - 1}.$$

現実の SF ネットでは, べき指数は $2 < \gamma < 3$ ので, $\langle k^2 \rangle = \sum k^2 P(k) \sim \sum k^{2-\gamma} \rightarrow \infty$, $q_c \rightarrow 0$: 強結合耐性 (不可避なウィルス拡散)

別解法：感染率がほぼ0でも蔓延

SF ネット上の SIS モデルにおける次数 k を持つノードの感染密度

$$\dot{\rho}_k(t) = -\rho_k(t) + \lambda k(1 - \rho_k(t))\Theta(t), \quad s_k(t) + \rho_k(t) = 1.$$

平均場近似 $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \frac{kP(k)\rho_k}{\langle k \rangle}$ に, $\dot{\rho}_k = 0$ の平衡解 $\rho_k = \frac{\lambda k \Theta}{1 + \lambda k \Theta}$ を代入して Θ の関数 $f(\Theta)$ として表す.

条件 $\exists \rho_k \neq 0$ は, $\frac{df(\Theta)}{d\Theta}|_{\Theta=0} \geq 1$ と等価.

ゆえに, 感染流行のしきい値 λ_c は,

$$\lambda_c \leq \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} \sim \frac{1}{\ln N} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

Robust, Yet Vulnerable

SF構造の性質

頑健性：ランダムなノード故障には強く連結性を保持

脆弱性：ハブの集中攻撃で極度に分断

⇒ 逆に、極度な分断性は、ウィルス拡散の防止には好都合！

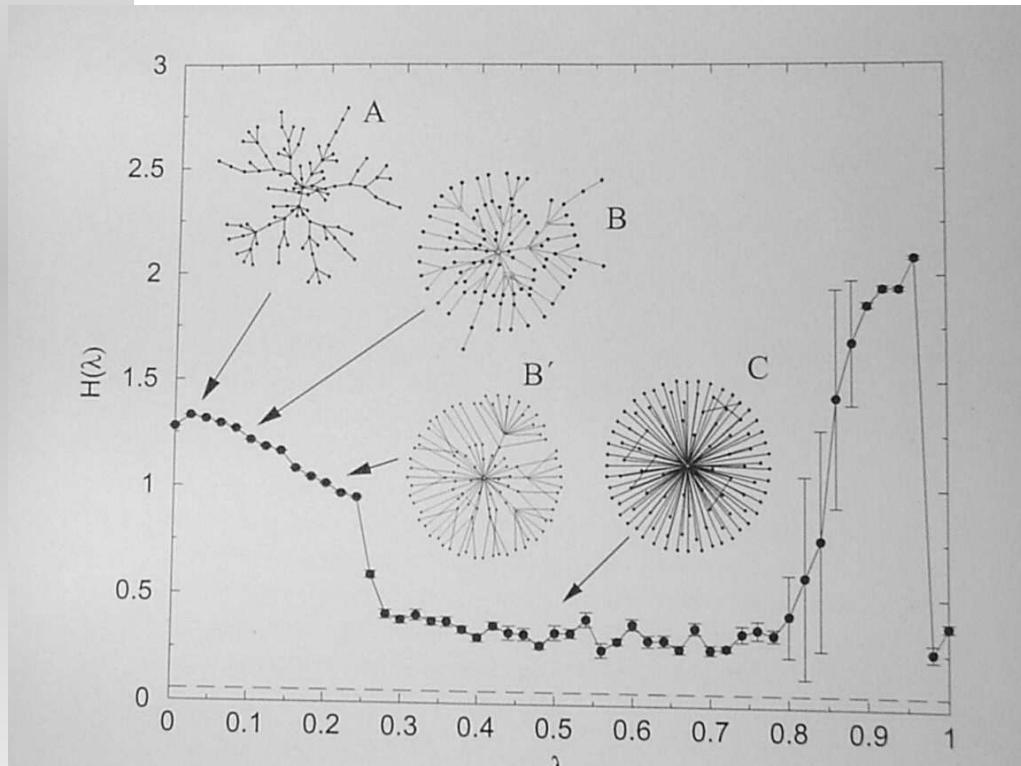
Z. Dezsö and A.L. Barabási,
PRE 65, 055103, 2002, R. P.-
Satorras and A. Vespignani, PRE
65, 036104, 2002



Optimal Topology

経済性 : リンク数 $\leftarrow 0 < \lambda < 1 \rightarrow$ 通信効率 : 距離

Random (tree) - Pref. (SF) - Forced (star, clique)



$$\min E(\lambda) = \lambda d + (1 - \lambda)\rho,$$

$$\text{距離 } d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i < j} D_{ij}}{nC_2} / D_{max},$$

$$\text{リンク数 } \rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i < j} a_{ij}}{nC_2},$$

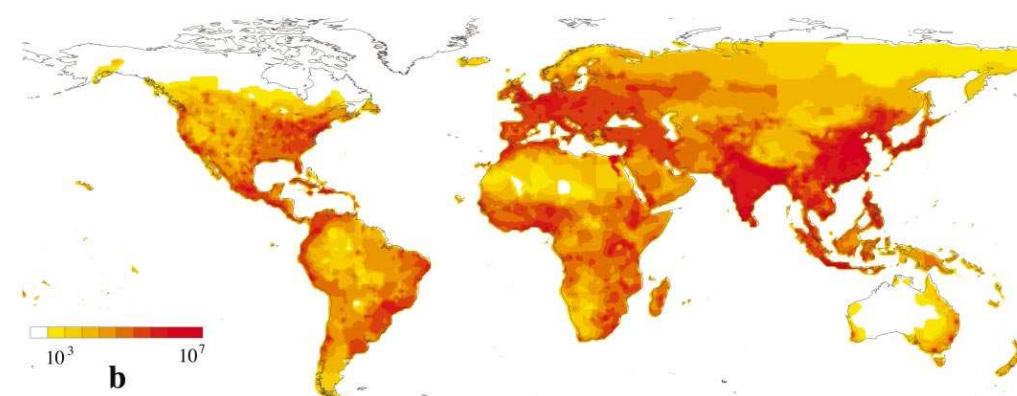
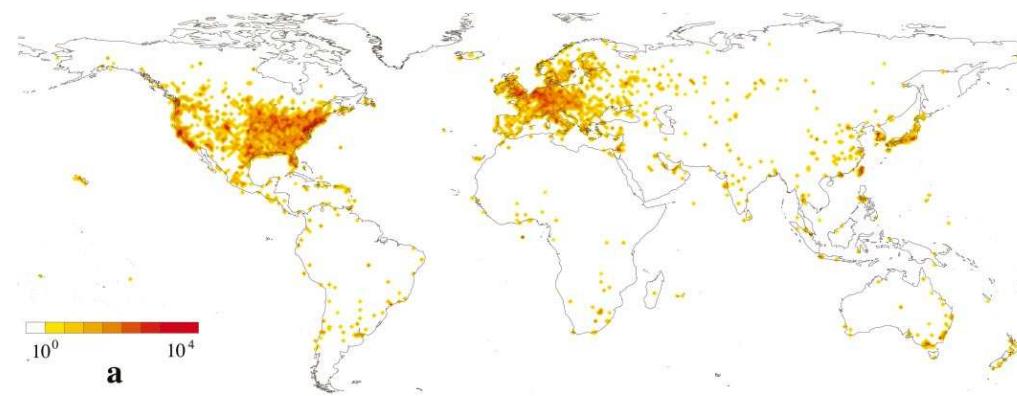
次数 k の頂点頻度 p_k の
エントロピーで評価

$$H \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{k=1}^{n-1} p_k \log p_k$$

R.F. i Cancho and R.V. Solé, SantaFe Inst. Working Paper 01-11-068, 2001

2. 空間上のネットワーク特性

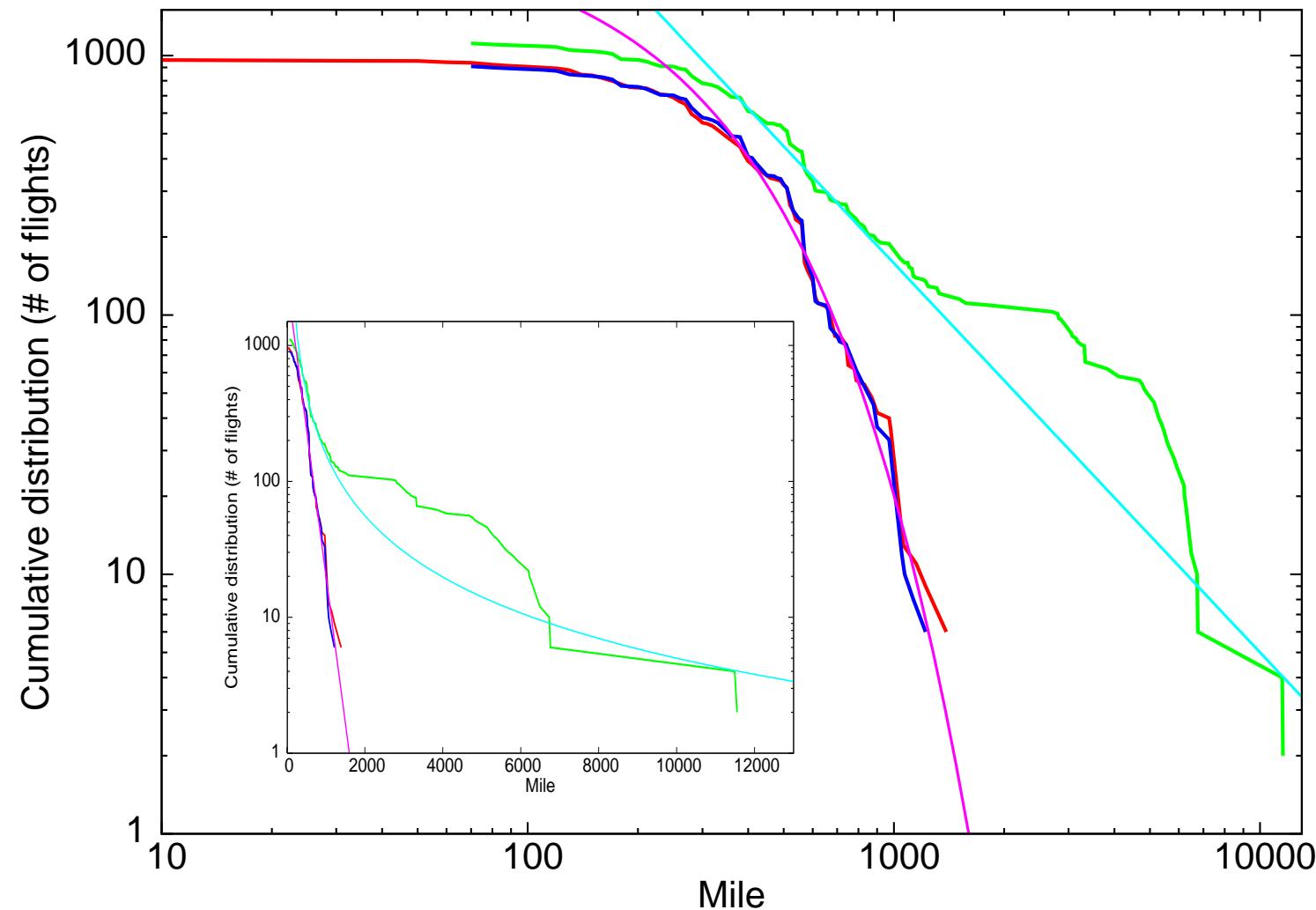
多くの現実のネットワークは距離尺度を持つ空間に埋め込まれ、ノードは疎密に分布：**Non-Poisson！**
ルータ（上図）と人口（下図）の密度分布



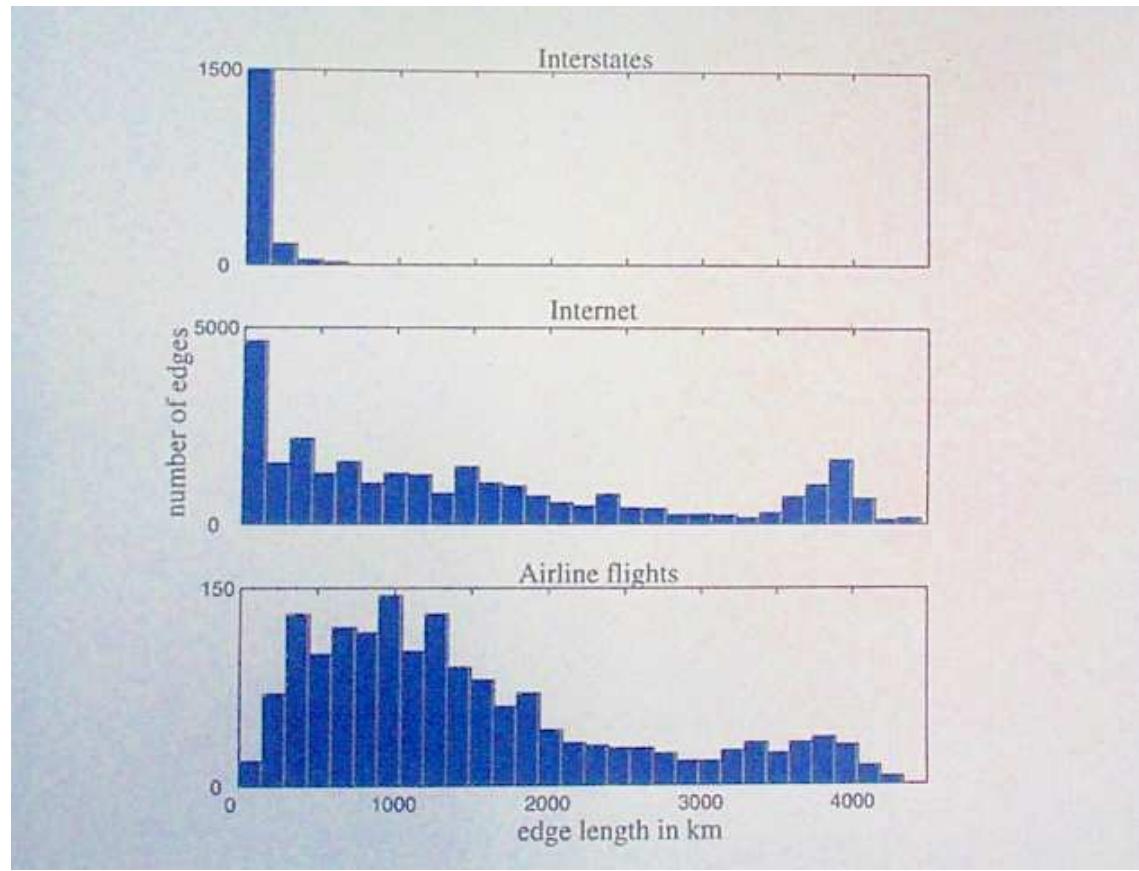
Yook, Jeong, Barabási, PNAS 99(21), 2002

航空路線のリンク長分布

国内線は指数分布, 国際線を含めるとべき乗分布

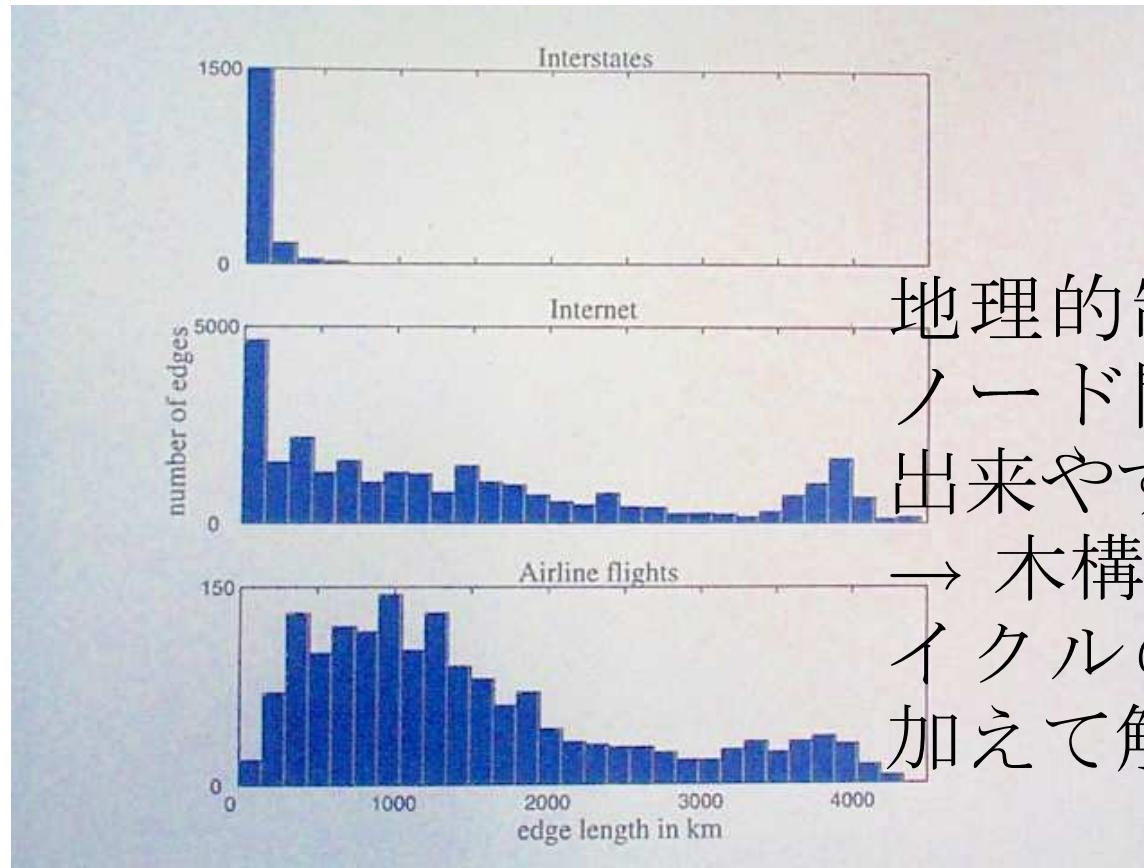


Geographical Constraints



M.T.Gastner and M.E.J.Newman,
Euro.Phys. J. B 49(2), 2006.

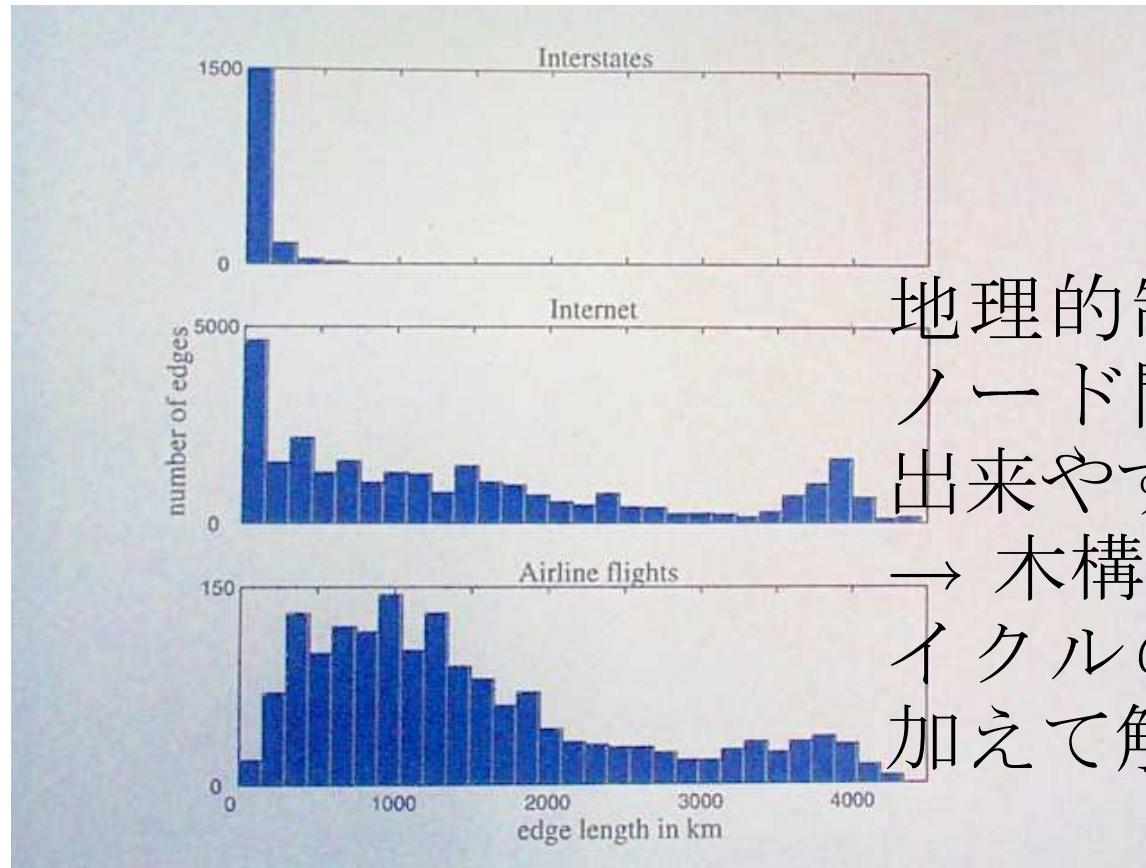
Geographical Constraints



地理的制約により近接ノード間のサイクルが出来やすい
→木構造に長さ L のサイクルの独立な影響を加えて解析を拡張

M.T.Gastner and M.E.J.Newman,
Euro.Phys. J. B 49(2), 2006.

Geographical Constraints



地理的制約により近接ノード間のサイクルが出来やすい
→木構造に長さ L のサイクルの独立な影響を加えて解析を拡張

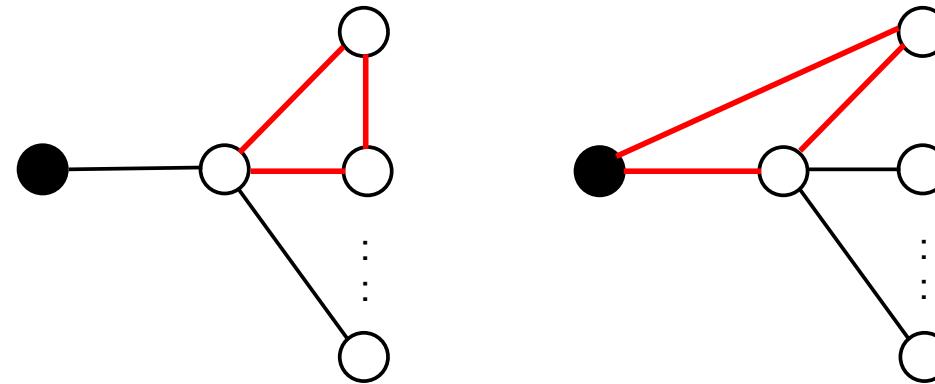
M.T.Gastner and M.E.J.Newman,
Euro.Phys. J. B 49(2), 2006.

$\forall P(k)$ において、短いサイクルの存在でより脆弱に！

Effect of Triangles (or Cycles)

長さ3のサイクル（友達の友達の三角形）の影響

$$q_c^* = \frac{\langle k \rangle}{\langle k(k-1) \rangle - \left(1 - q_c^* \frac{\langle k(k-2) \rangle}{\langle k \rangle}\right) \langle C(k) \frac{(k-1)^2}{2} \rangle}$$



理論予測：分母がより小さくなつて $q_c^* > q_c$, 短いサイクルの存在でランダム故障に対してより脆弱化

L.Huang et al., Europhys.Lett. 72(1), 2005.

地理的SFネットワークモデル

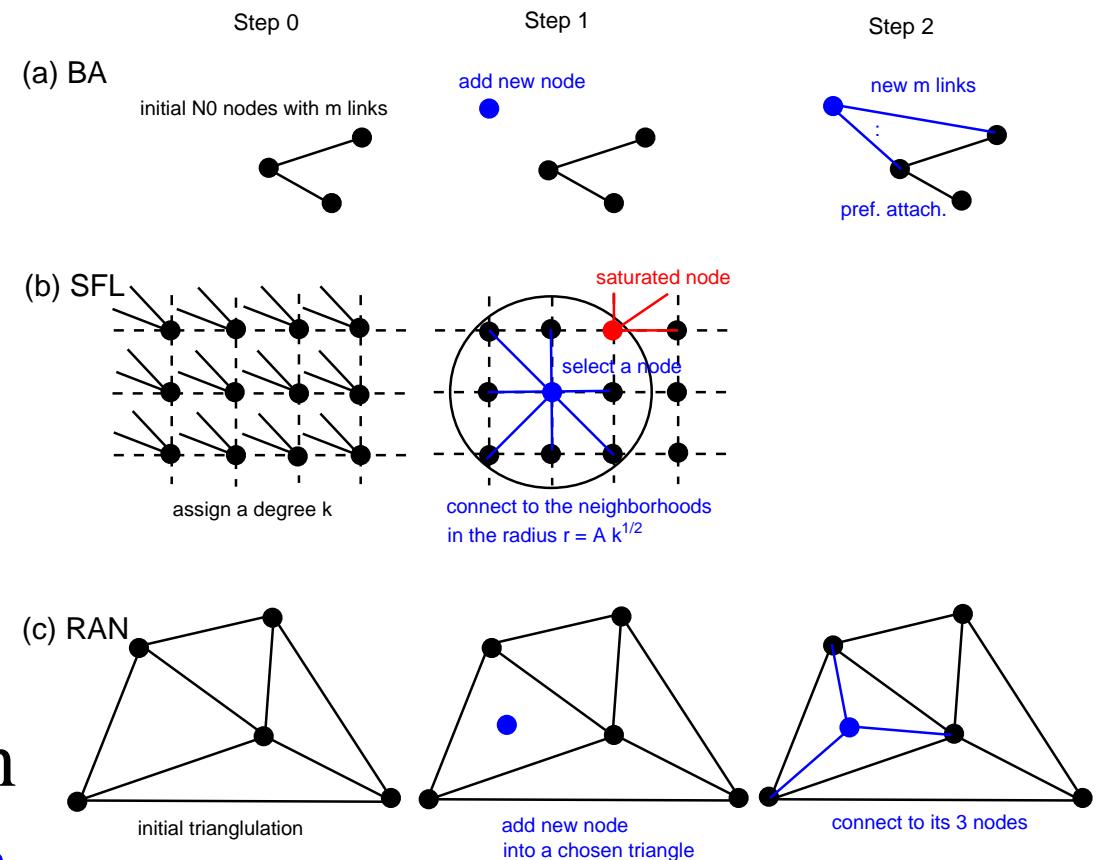
- Modulated BA:

$$\Pi_i \sim k_i \times l^\alpha,$$

rand. position
of node

- SF on lattices:
connect within
 $r = A \times k_i^{1/d}$

- Space-filling:
subdivision
of a region
(heterogeneous
dist. of nodes)



Random Apollonian Net

$$n(k+1, N+1) = \frac{k}{N_\Delta} n(k, N) + \left(1 - \frac{k+1}{N_\Delta}\right) n(k+1, N)$$

$P(k) \approx n(k, N)/N$ を代入して整理した,

$$k(P(k+1) - P(k)) + \frac{N + N_\Delta}{N} P(k) = 0$$

から, k について連続近似した微分方程式

$$k \frac{dP}{dk} = -\gamma_{RA} P$$

を変数分離法で解くと, $P(k) \sim k^{-\gamma_{RA}}$. 但し,

$$\gamma_{RA} = (N_\Delta + N)/N \approx 3, N_\Delta = N_{\Delta 0} + 2N.$$

T. Zhou, G. Yan, and B.-H. Wang, PRE 71, 046141, 2005.

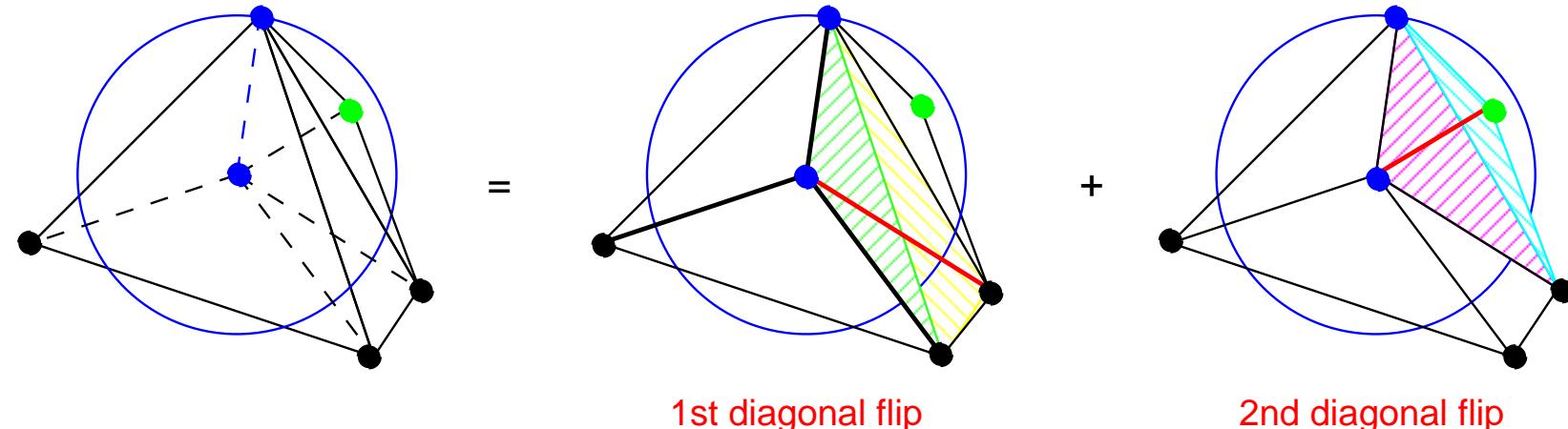
Geographical SF Nets

三角分割されたある初期構成から反復的に成長

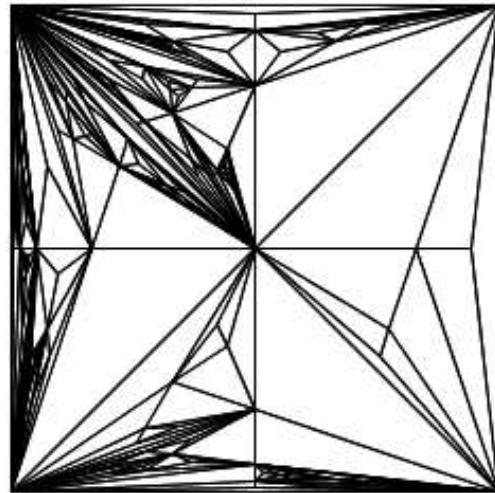
Random Apollonian: ランダム選択した三角形内に新ノードを挿入し, そこから各頂点に結合
(三角形の再分割)

Delaunay-like SF: 新ノードを中心としたある範囲内で対角変形を施す (長距離リンクの抑制)

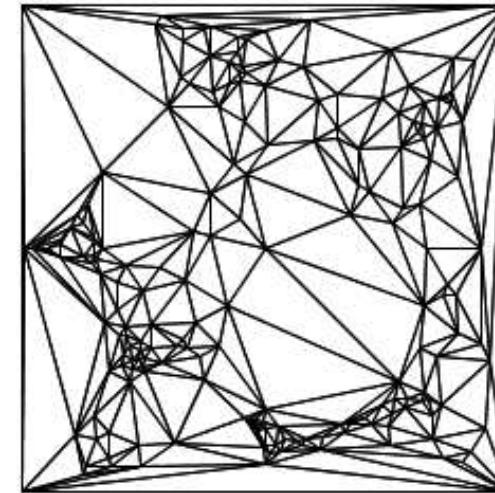
Delaunay Triangulation: 対角変形操作を全域で



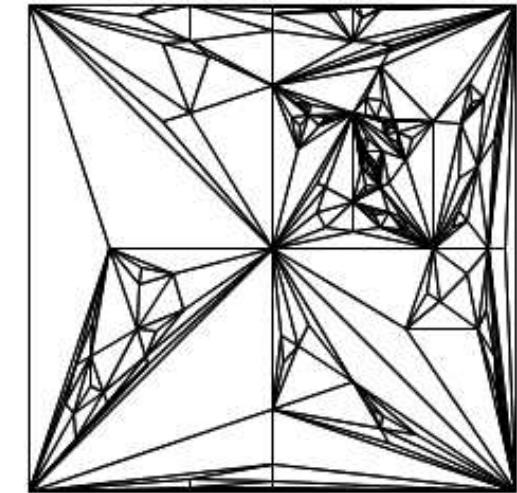
Topological Structure



RA



DT

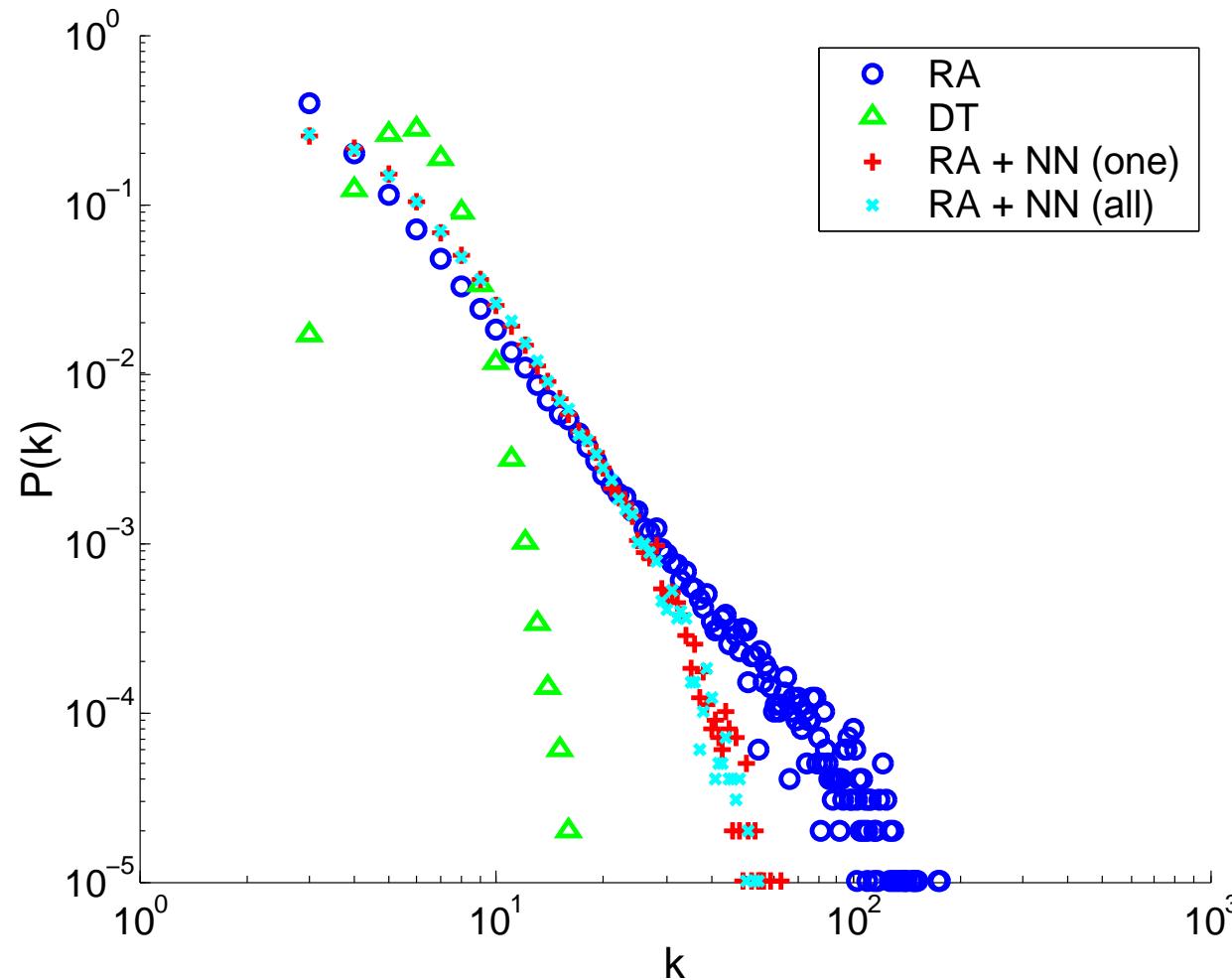


DLSF

- 4隅と中央におけるハブ的スタブ
- 人口分布のような疎密部分が自然に創出

Y.Hayashi and J.Matsukubo, Physical Review E 73, 066113, 2006.

Degree Distribution

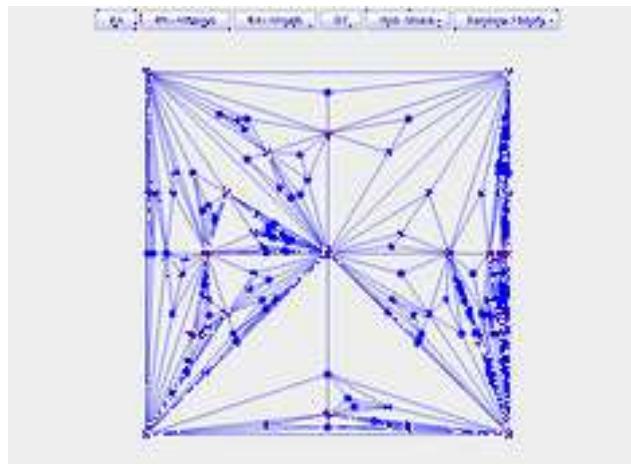


RA: power law, DT: lognormal, DLSF(RA+NN):
power law with exponential cutoff

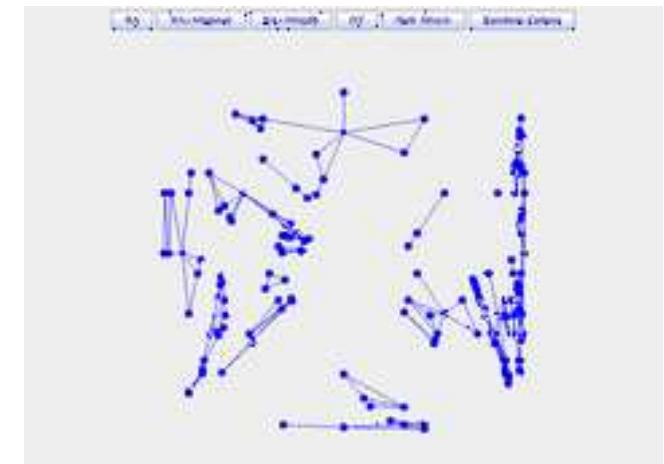
Damages by Attacks

Initial N=200

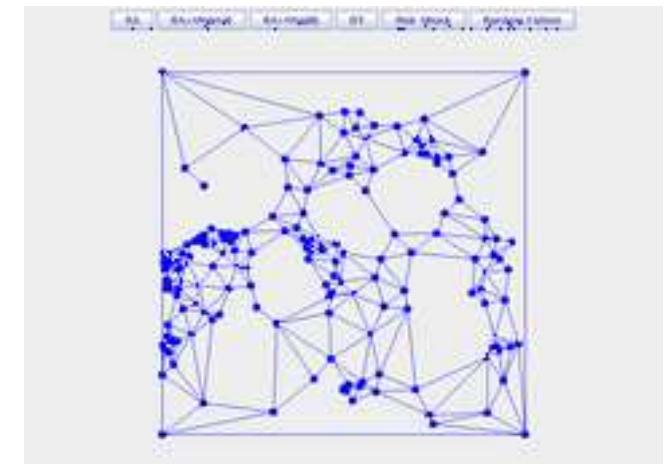
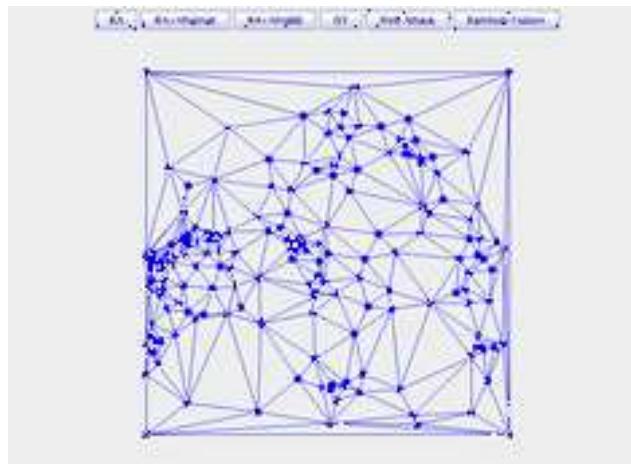
RA



targeted attacks on
16 hubs



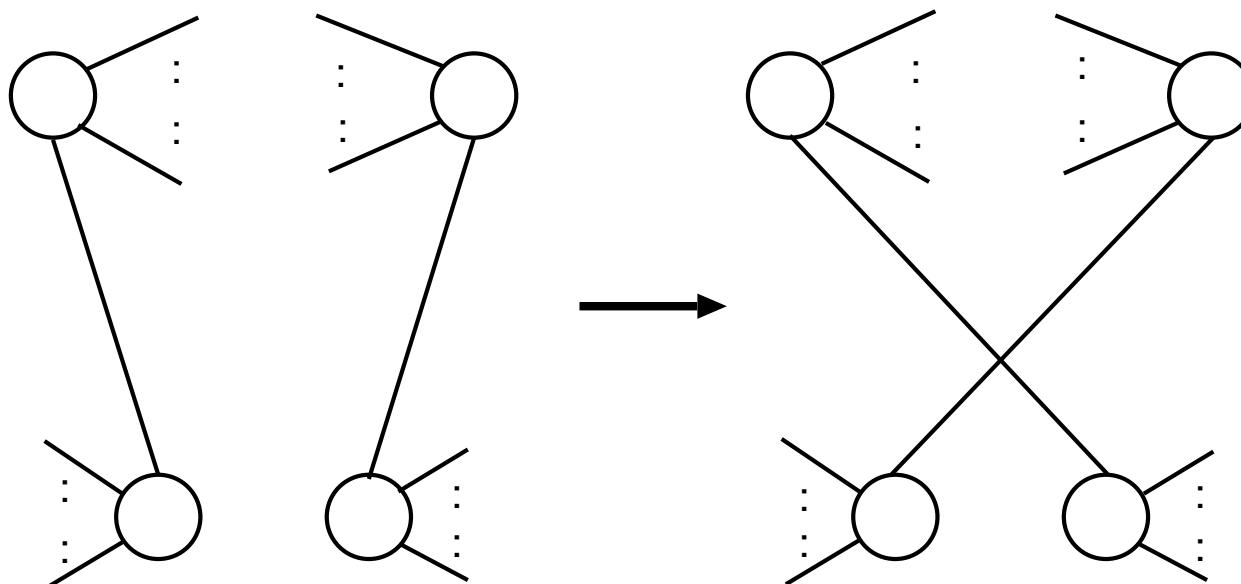
DT



Randomly Rewired Nets

地理的制約を無くしたネットワークとの比較：

総リンク数や次数分布を保持したまま、リンクペアをランダムに張り替えて null model 化

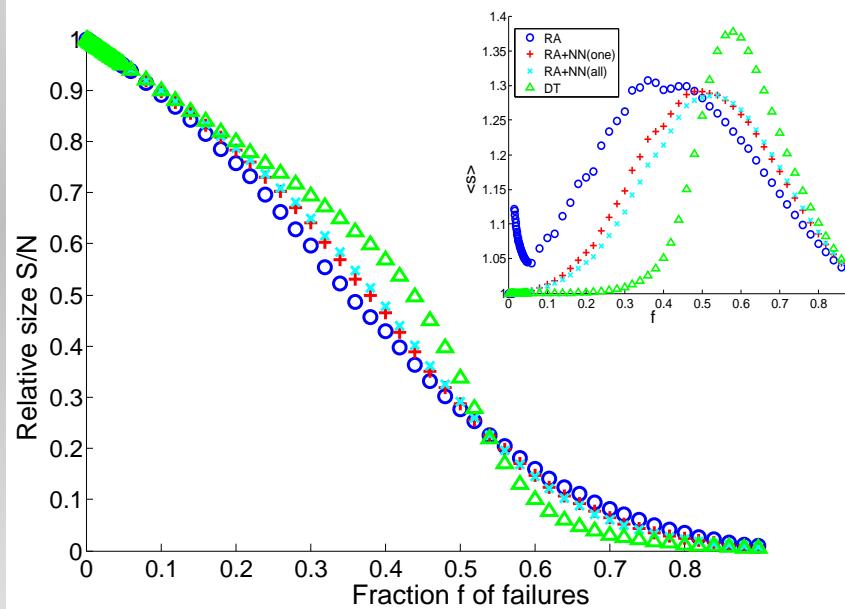


Rewiring a pair of links with the same degree at each node

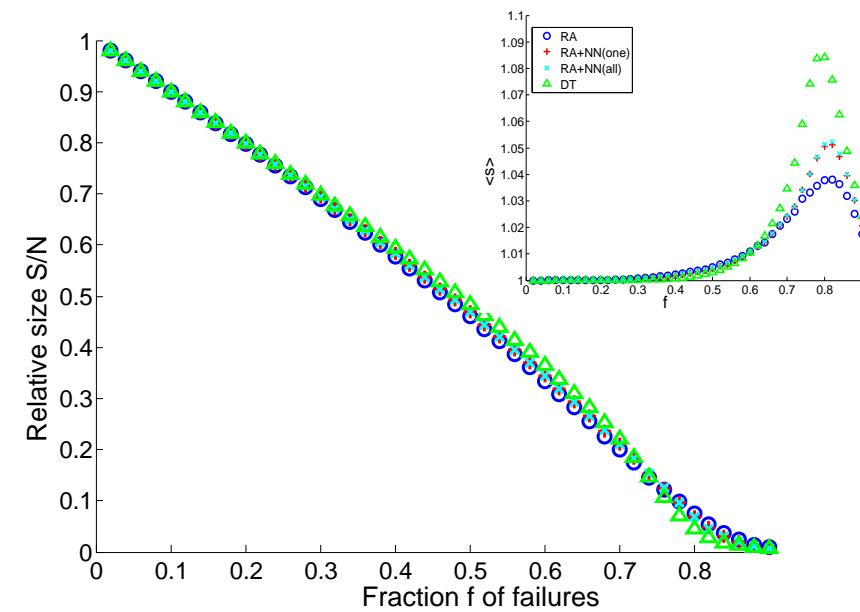
Maslov et al., Physica A 333, 2004

Tolerance to Failures

最大連結成分 GC のサイズ比 S/N
挿入図：平均クラスタサイズ $\langle s \rangle$



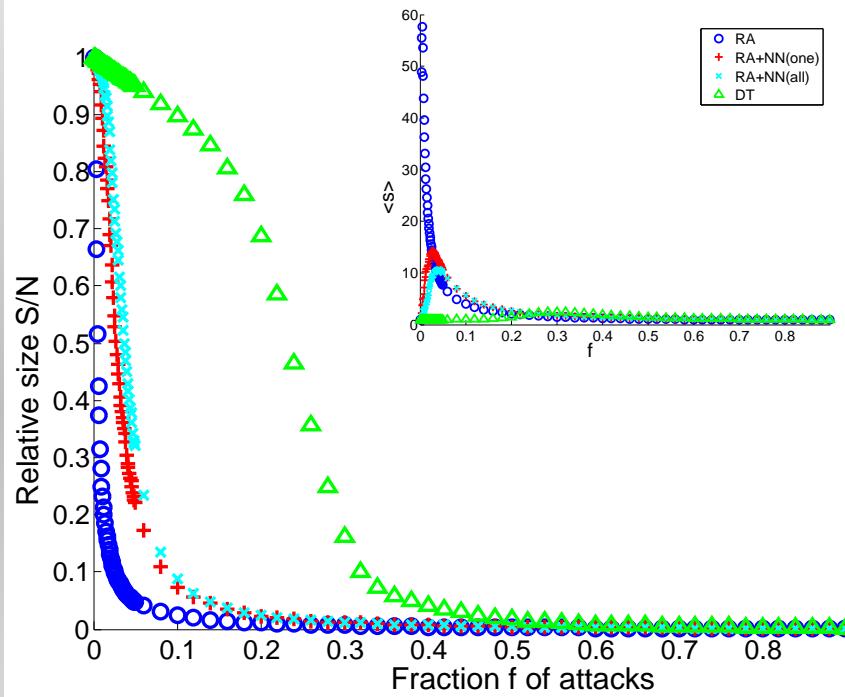
(a) geographical nets



(b) rewired nets

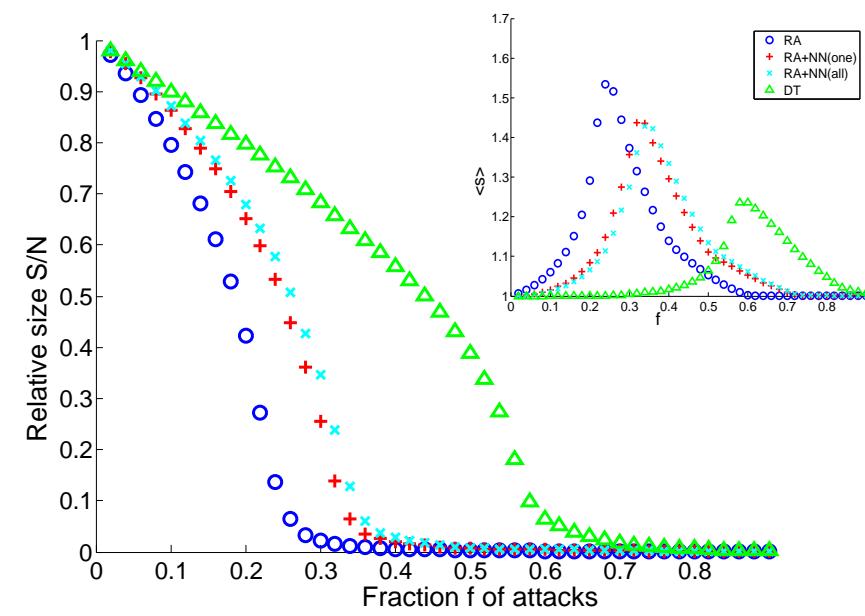
⇒ どのモデルもランダム故障には同様な頑健性
(RA: ○, DT: △, DLSF(RA+NN): +)

Tolerance to Attacks



(a) geographical nets

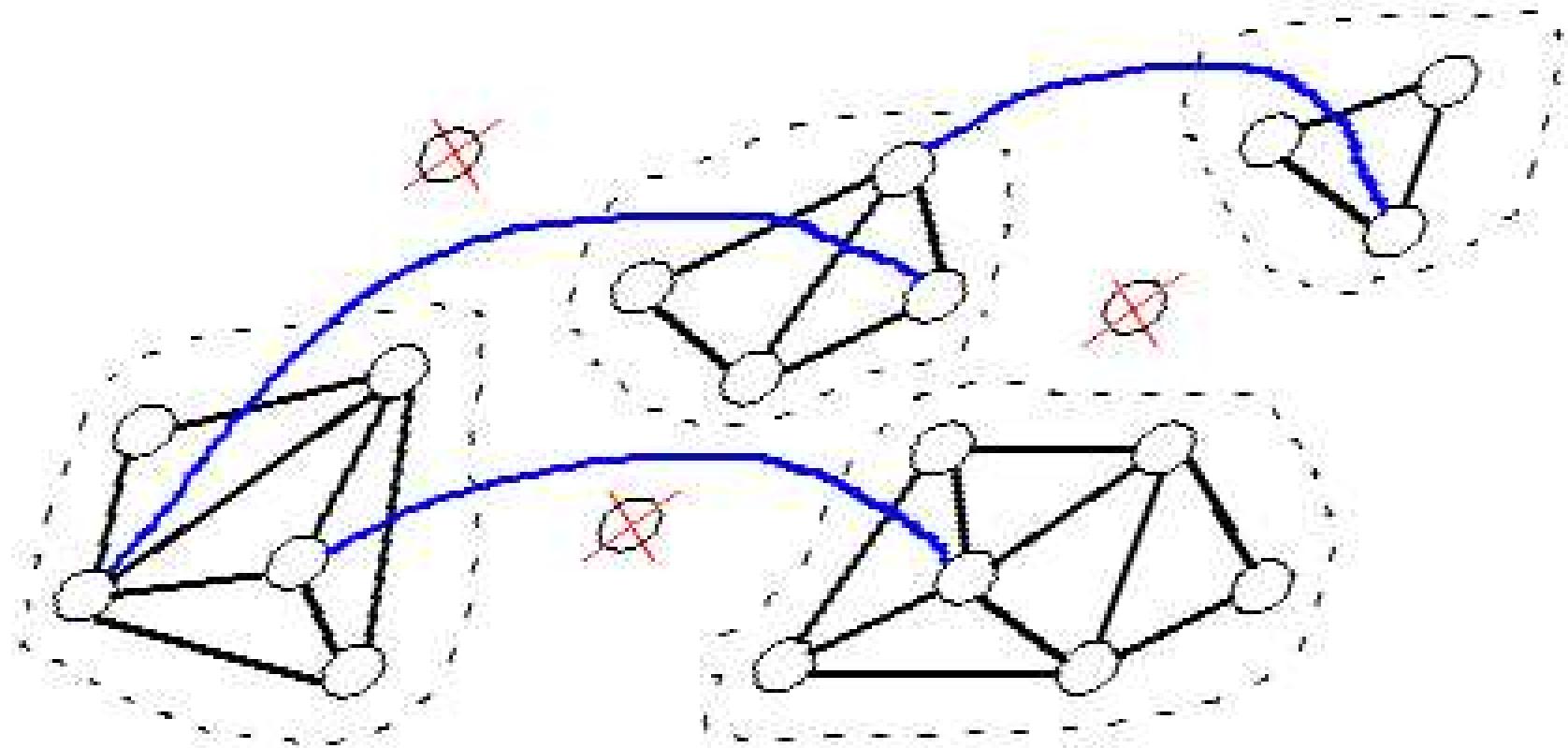
⇒ 地理的制約を無くすと、ハブ攻撃への脆弱性が抑制



(b) rewired nets

3. ショートカット効果

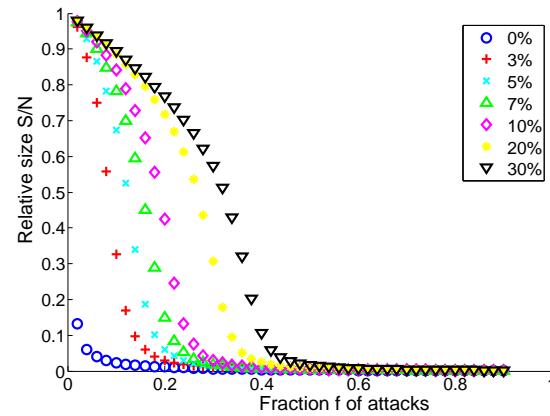
遠距離交際（高速道）と近所づきあい（一般道）



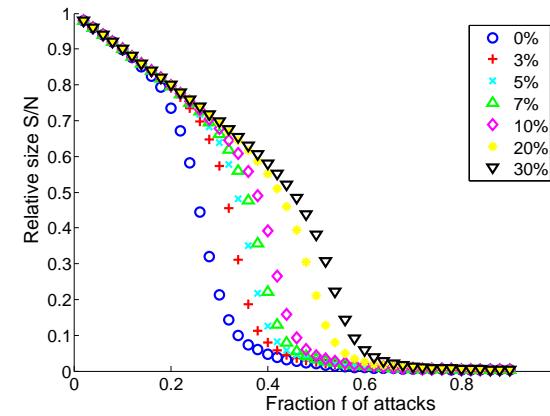
⇒ 攻撃で孤立したクラスタを高架橋のよう繋ぐ

ハブ攻撃への脆弱性の改善

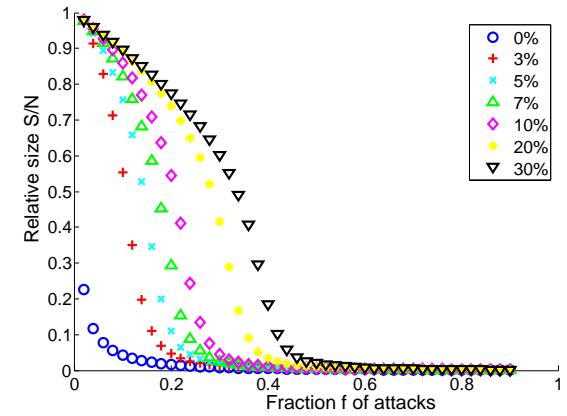
攻撃率 f に対する GC のサイズ比 S/N



RA



DT



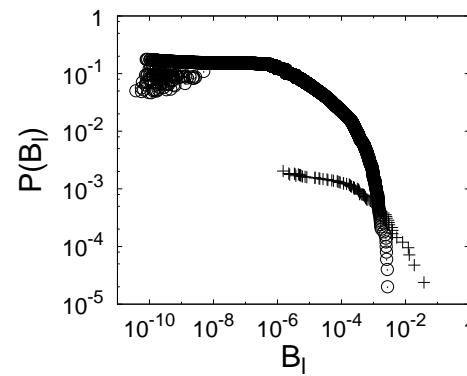
DLSF

Hayashi et. al., Physica A 380, 2007

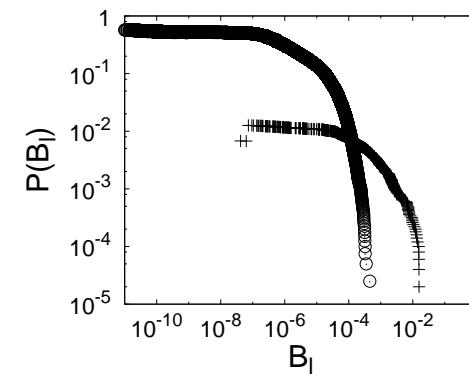
⇒ ショートカット率 ○ 3 % - ▽ 30 % で大幅に改善

バックボーン特性

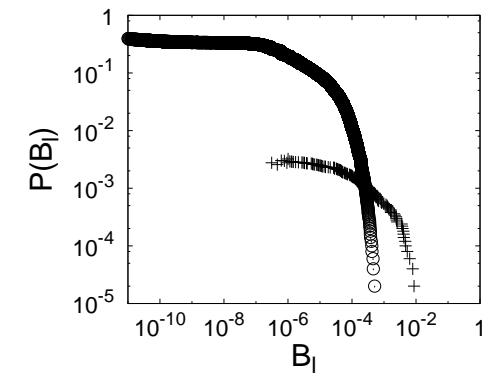
元のリンク○とショートカット+の媒介中心性 B_l の分布 $P(B_l)$



RA



DT



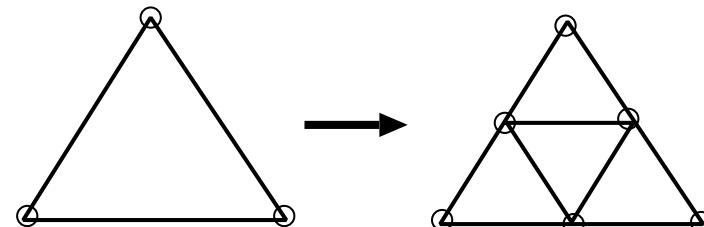
DLSF

⇒ ショートカットが通信バックボーンとして機能することを示唆

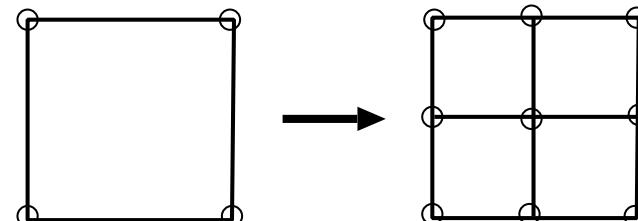
但し, DLSF では最大次数が若干抑制されても, 長距離リングが未だ存在する

4. Multi-Scale Quartered Net

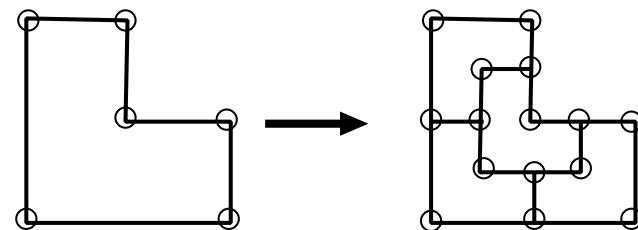
自己相似形の細分によるネットワーク構築法を
提案



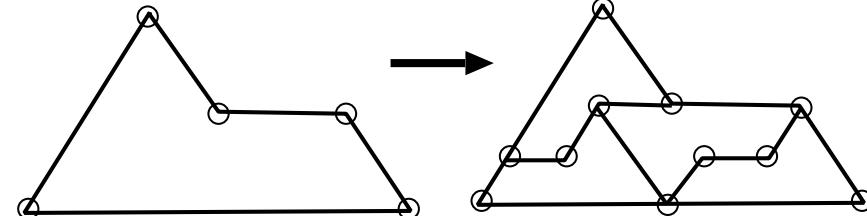
(a) triangle



(b) square



(c) triomino chair tiling

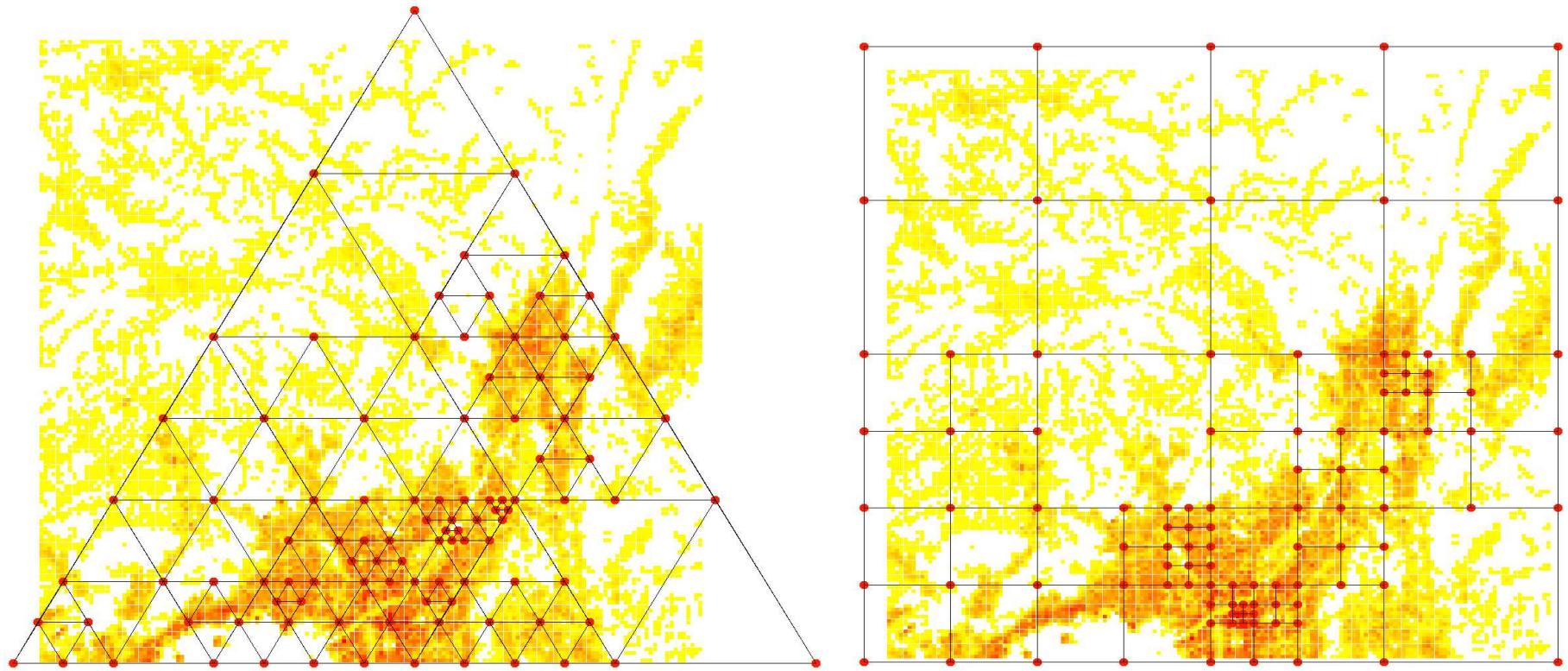


(d) sphinx tiling

Y.Hayashi, Physica A, Vol.388, 2009

三角分割と四角分割の例

人口分布に応じた確率で面を選択, 赤の過密地区にノードが集中して負荷分散 !



$$k_1 = 2, k_2 = 4(\text{Tri}) \text{ or } 3(\text{Squ}), k_3 = 6(\text{Tri}) \text{ or } 4(\text{Squ}).$$

Good Properties

MSQ ネットの優れた特性:

Good Properties

MSQ ネットの優れた特性:

- 3種のみの低次数であることから, 故障と攻撃の両方に対して高い結合耐性, 総リンク数も $O(N)$ で少なく経済的

Good Properties

MSQ ネットの優れた特性:

- 3種のみの低次数であることから, 故障と攻撃の両方に対して高い結合耐性, 総リンク数も $O(N)$ で少なく経済的
- 任意のノード間のパス長が高々 t 倍
(the t -spanner with the stretch factor $t = 2$)

Good Properties

MSQ ネットの優れた特性:

- 3種のみの低次数であることから, 故障と攻撃の両方に対して高い結合耐性, 総リンク数も $O(N)$ で少なく経済的
- 任意のノード間のパス長が高々 t 倍
(the t -spanner with the stretch factor $t = 2$)
- GPS 等による位置情報を用いた, 効率的な平面上の分散ルーティングが適用可

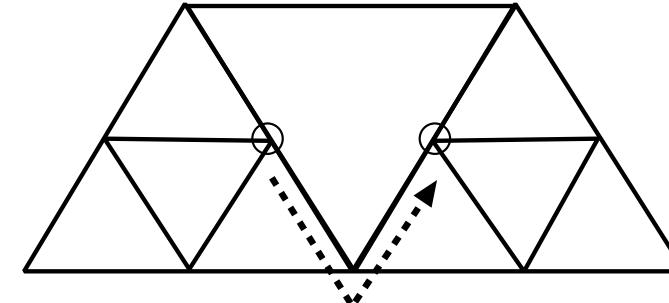
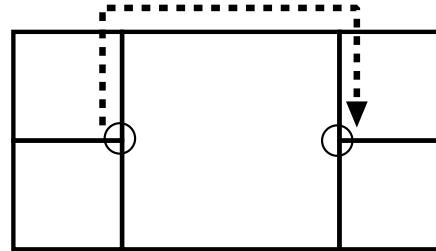
Good Properties

MSQ ネットの優れた特性:

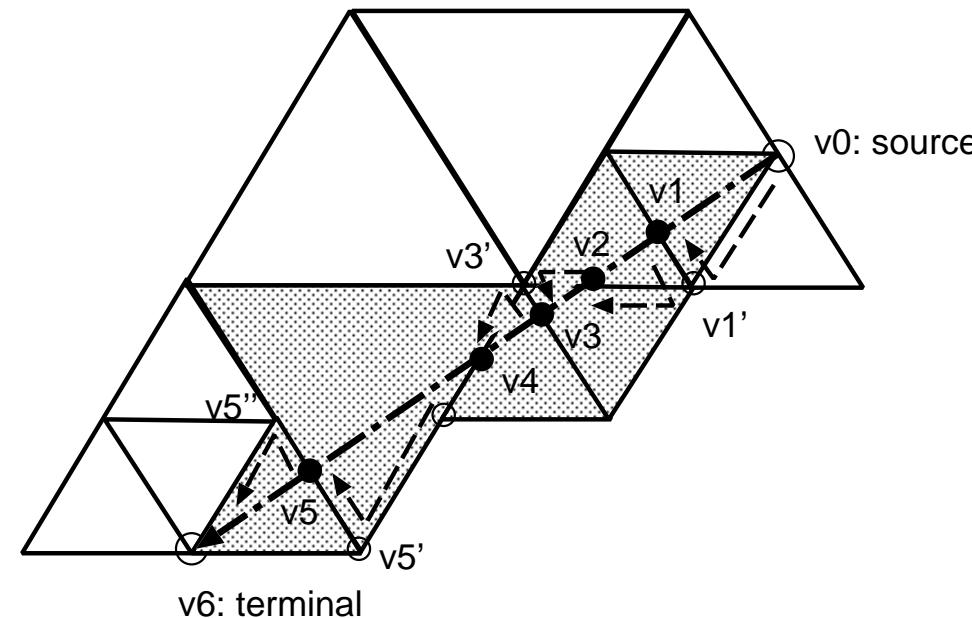
- 3種のみの低次数であることから, 故障と攻撃の両方に対して高い結合耐性, 総リンク数も $O(N)$ で少なく経済的
 - 任意のノード間のパス長が高々 t 倍
(the t -spanner with the stretch factor $t = 2$)
 - GPS 等による位置情報を用いた, 効率的な平面上の分散ルーティングが適用可
- 局所情報のみで自律分散的に成長できること,
つまり, 各部分で構築が可能なのもメリット！

Bounded Short Paths

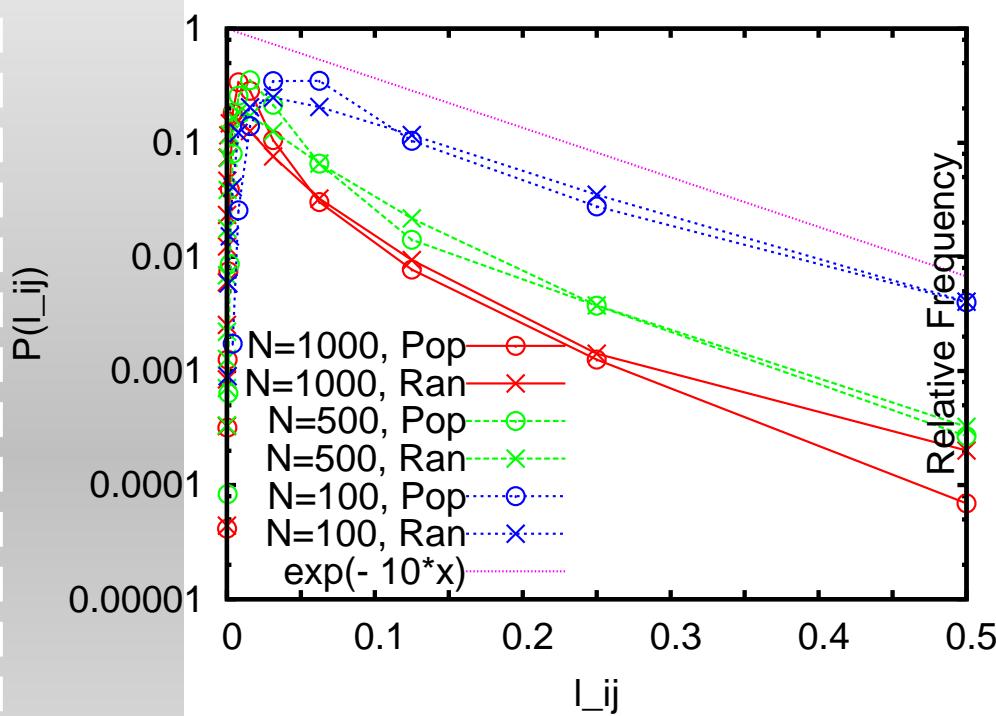
最悪の $t = 2$ の例



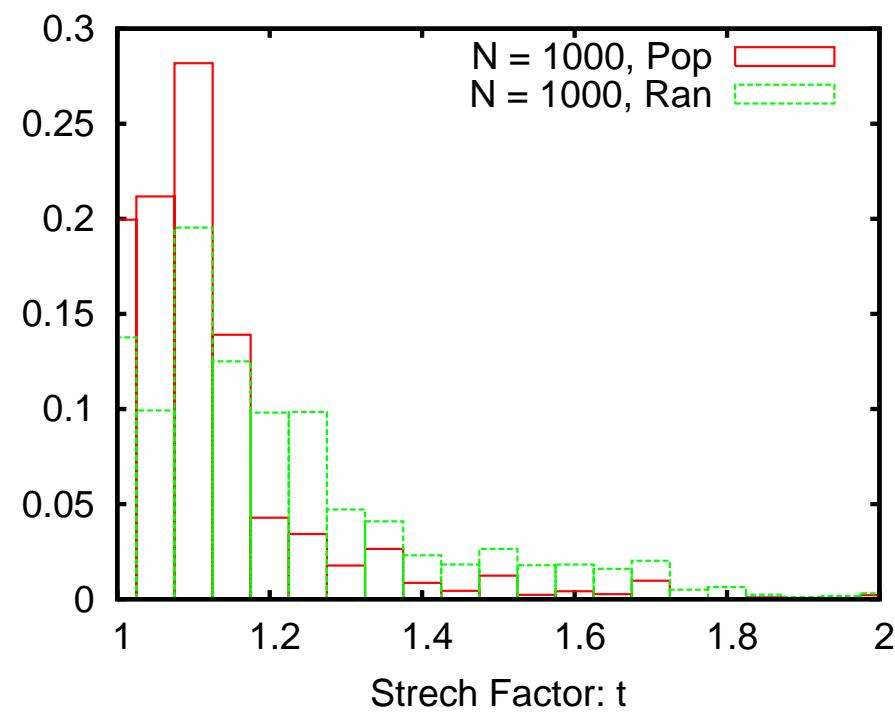
フェイスルーティング法：2ノード間の直線と交差する面の縁を通るのが最短



リンク長と t -値の分布



(a) Dist. of Link Length



(b) Histogram of t -value

Y.Hayashi, Physica A, Vol.388, 2009.

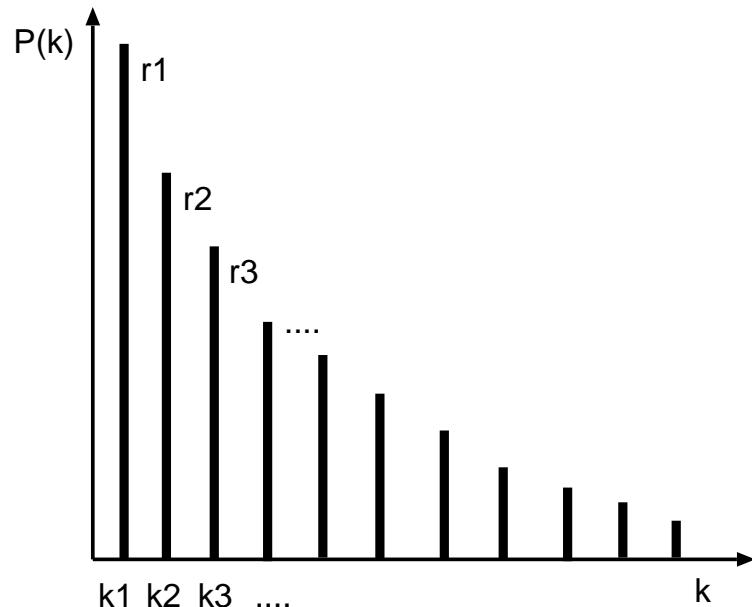
Opt. Modality

Multimodal net ($i = 1, 2, \dots, M$ modalities):

$k_i \stackrel{\text{def}}{=} k_1 b^{i-1}$, $r_i \stackrel{\text{def}}{=} r_1 a^{i-1}$, $a > 1$, $0 < b < 1$ では,

bimodal net: $k_1, k_2 = \sqrt{\langle k \rangle N}$, が故障と攻撃の両方
に対して最適 !

$M \rightarrow \infty$ における SF が最悪

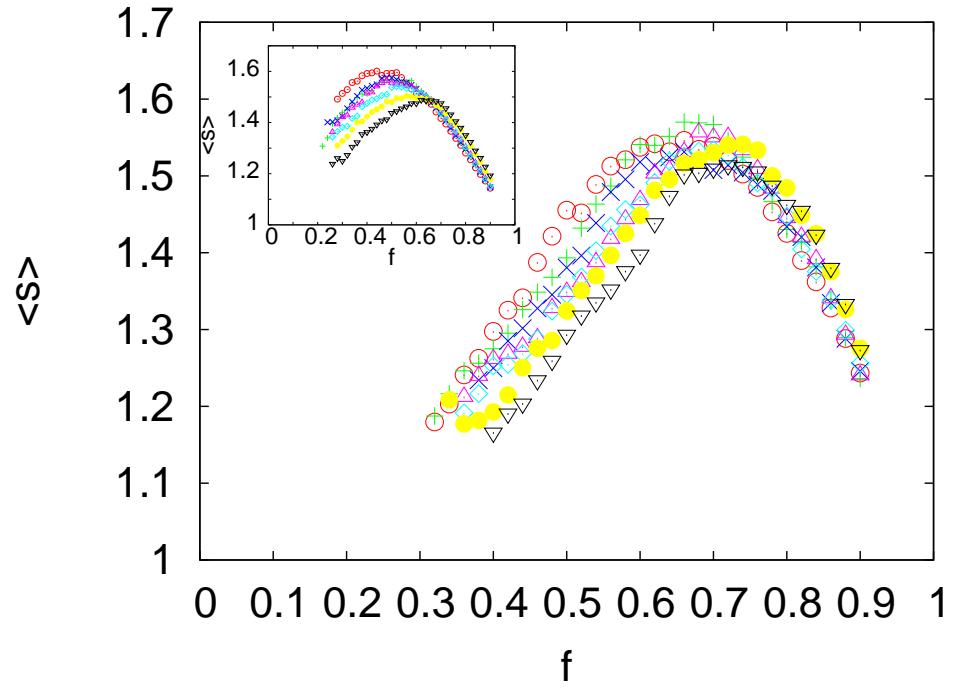
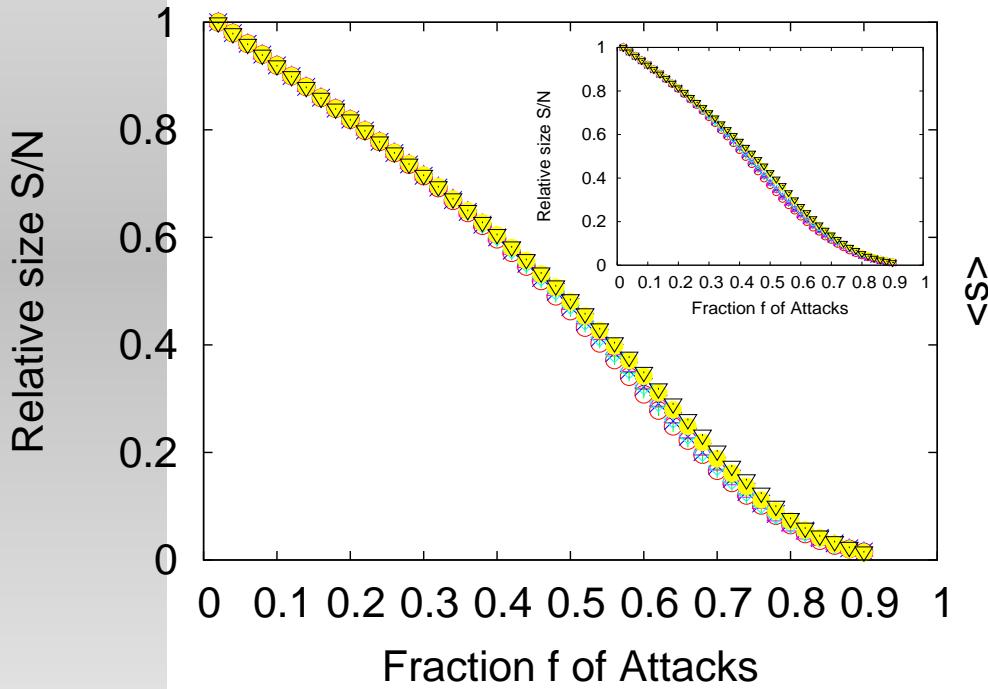


一般に、どんな割合で混じった頻度 $P(k)$ が最適か？

T.Tanizawa, G.Paul, S.Havlin, H.E.Stanley, Phys. Rev. E 74, 2006

Opt. Bimodal Net

ハブ攻撃に対する GC サイズ比 (右) と平均クラス
タサイズ (左)

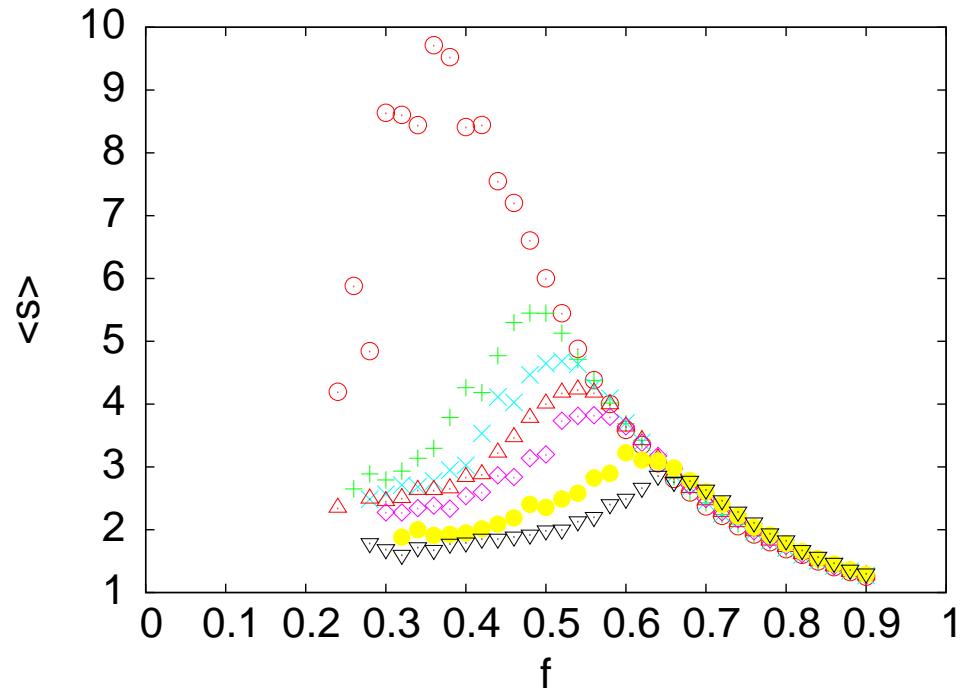
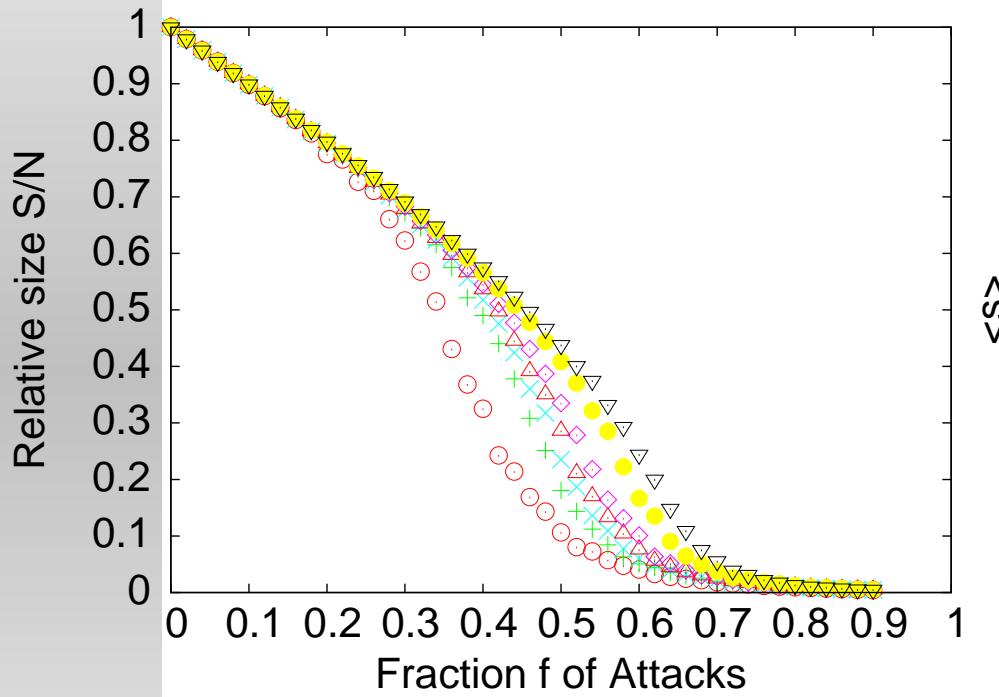


$$N = 1000, \langle k \rangle = 4.882 > 4.54, k_1 = 4, k_2 = 67.$$

Insets: $\langle k \rangle = 3.975 < 4.54, k_1 = 3, k_2 = 68.$

Nearly Opt. Robustness

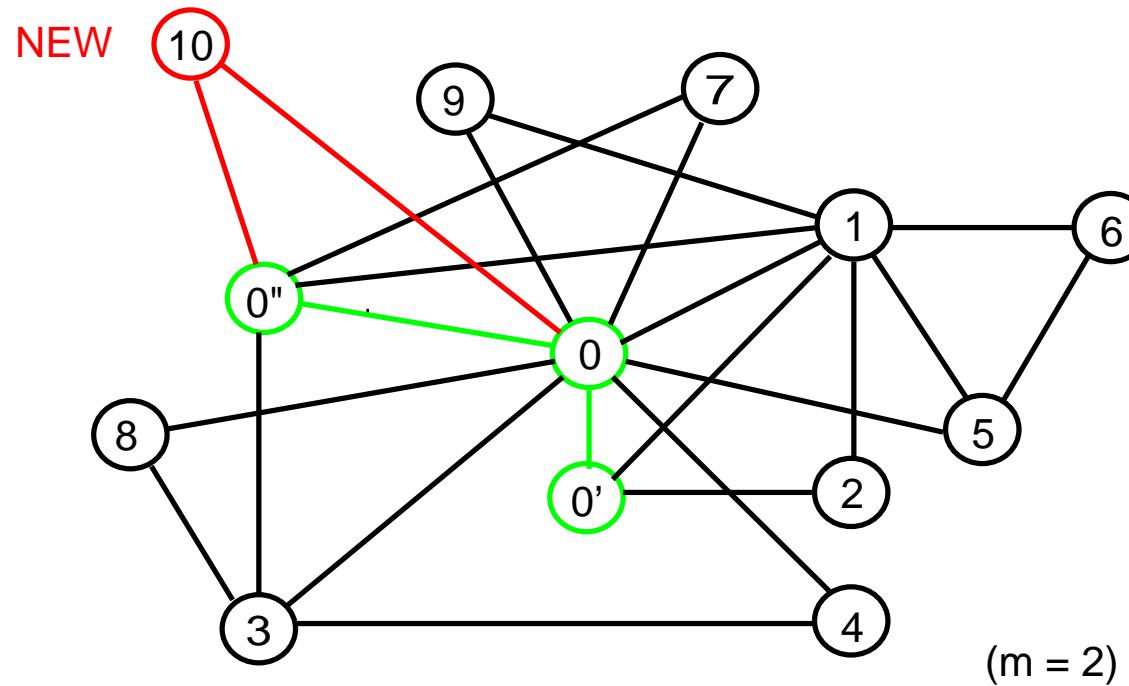
最適に近いMSQネットのロバスト性



赤○から黒▽の記号は、ショートカット追加率
0, 3, 5, 7, 10, 20, 30 % を表す
 $N = 1000, k_1 = 2, k_2 = 4, k_3 = 6, \langle k \rangle = 4.54$

Y.Hayashi, Physica A, Vol.388, 2009.

BA-like Geo. Net

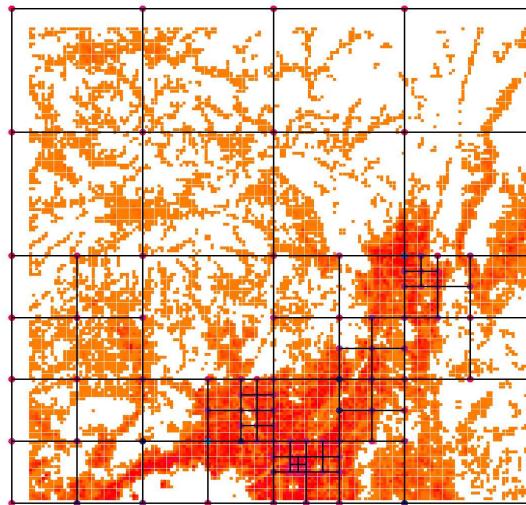


$$\Pi_j \propto d_{ij}^{-\alpha} \times \text{pop}_j^\beta \times k_j^\gamma$$

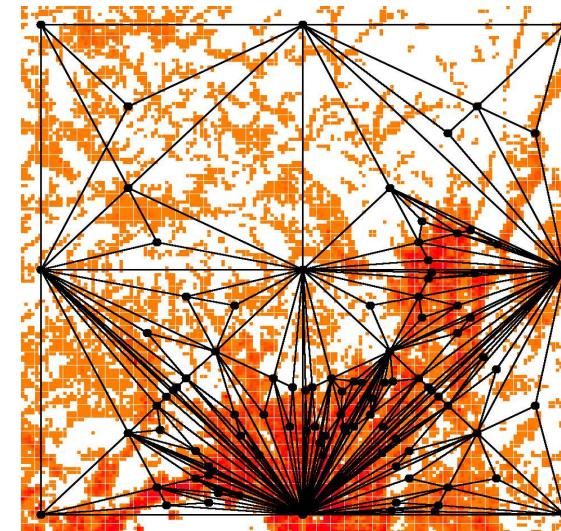
α 大では近接グラフ（距離重視）, β 大では人口集中箇所にハブが出来やすい（ホップ数重視）

$\alpha = 2, \beta = 0$: Y.-B. Xie, et al, PRE 75, 036106, 2007.

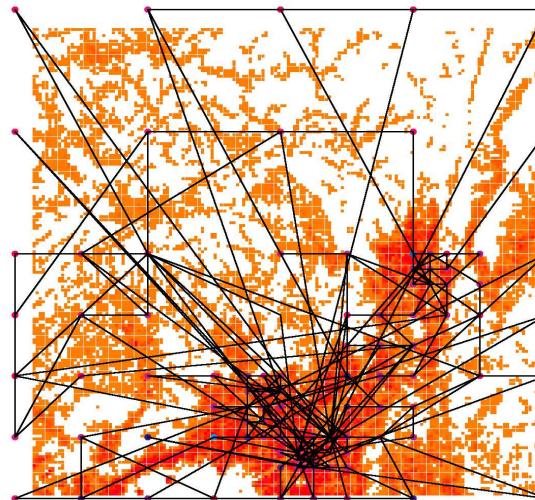
Visualizations



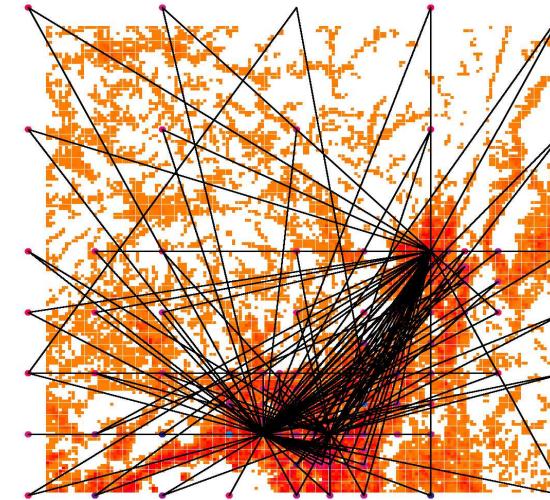
(a) Original MSQ



(b) Apollonian

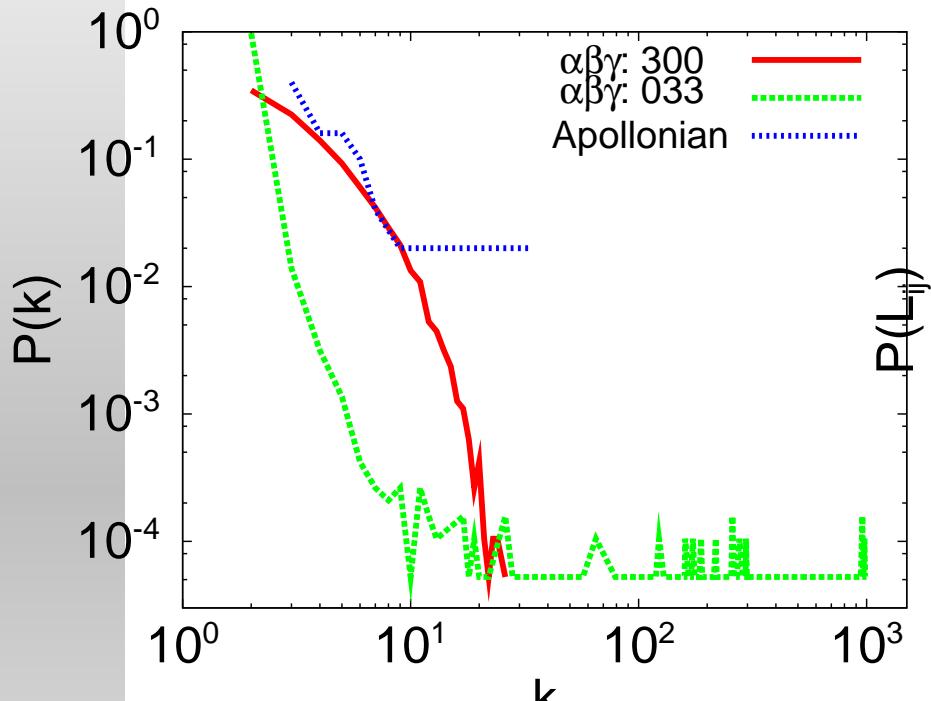


(c) BA-like:300

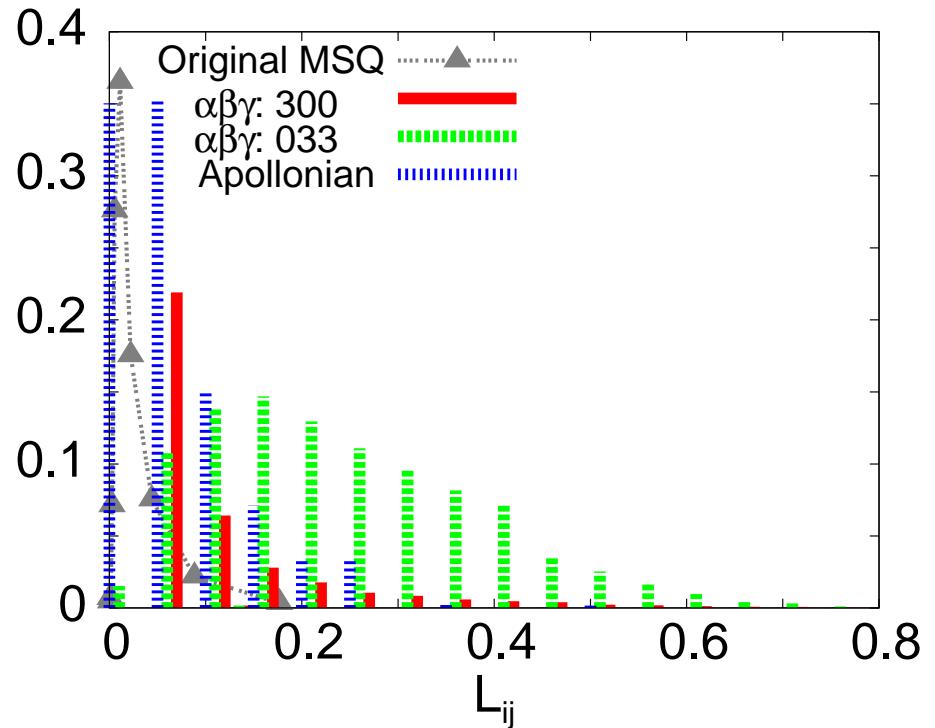


(d) BA-like:033

Topological Prop.



(a) Degree



(b) Link length

SF的な BA-like:033 や Apollonian, 近接グラフに近い BA-like:300 より, MSQ は小さな次数でリンク長も短い !

ノードとリンクへの最大負荷

Net	Rand	Pop	Rand	Pop
	$\max B_i$	$\max B_i$	$\max \bar{B}_l$	$\max \bar{B}_l$
000	0.254	0.227	0.085	0.081
003	0.766	0.854	0.048	0.087
030	0.362	0.392	0.134	0.180
033	0.657	0.710	0.056	0.099
300	0.282	0.235	0.121	0.121
303	0.444	0.532	0.073	0.107
330	0.397	0.337	0.121	0.143
333	0.634	0.620	0.106	0.072
Apollonian	0.295	0.278	0.056	0.059
MSQ	0.227	0.259	0.137	0.185

5. Markov chain (u.a.r)

時刻 t においてサイズの降順で定義した第 l 層の面数 $n_l(t)$ を要素とする状態ベクトルを考える

$$(n_1(t), n_2(t), \dots, n_l(t) \dots)$$

次の時刻 $t + 1$ で l 層のある面が選ばれる確率 $p_l(t) = n_l(t)/N(t)$ より、

$$(\dots, n_l(t), n_{l+1}(t), \dots) \rightarrow$$

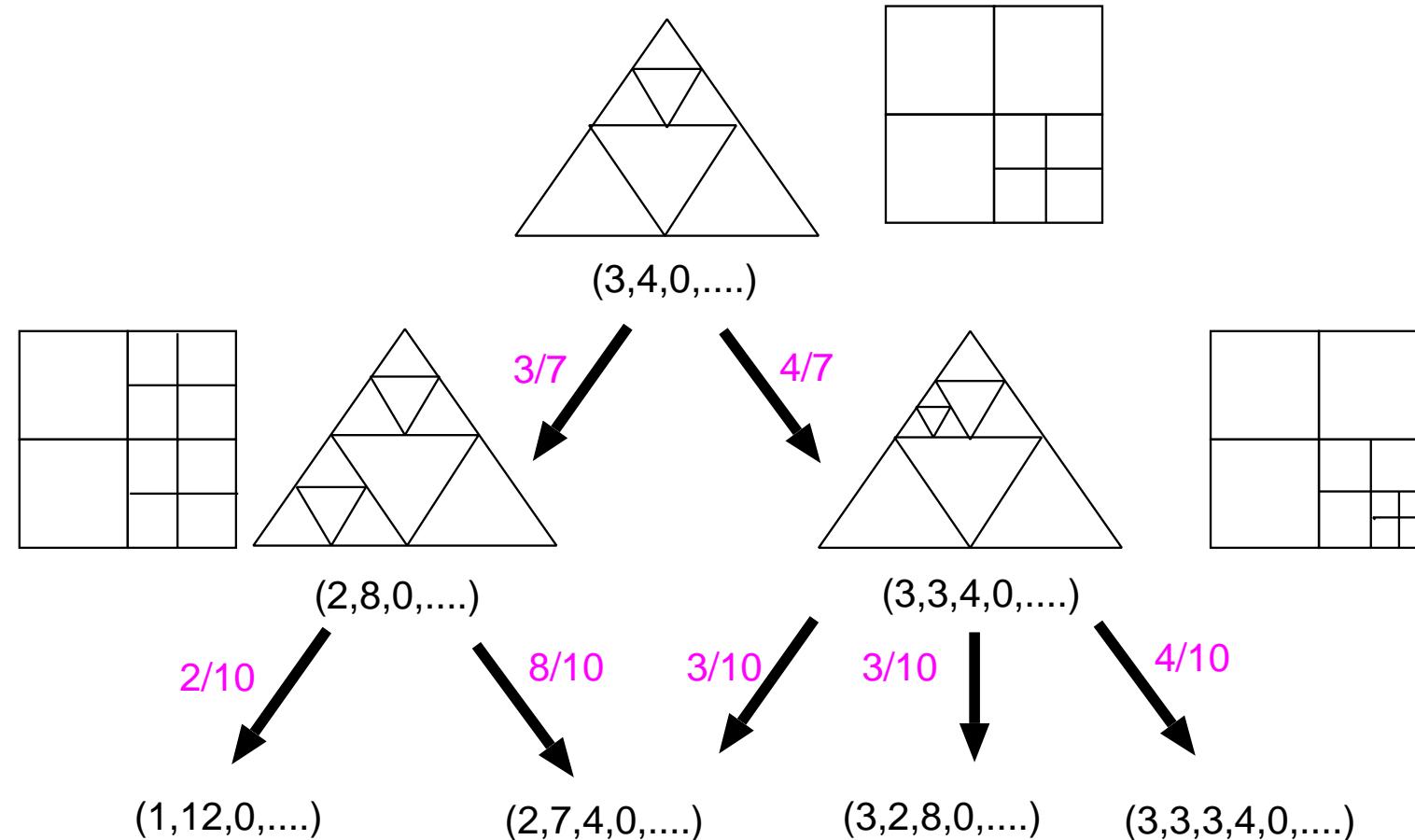
$$(\dots, n_l(t+1) - 1, n_{l+1}(t+1) + 4, \dots)$$

に遷移する、無限マルコフ過程をなす

$$\text{総面数} : N(t) = \sum_k n_k(t) = N_0 + 3t$$

Decision Tree

これは一定確率で子孫を生成する Galton-Watson 型の分岐過程とは異なる



Equivalent Wave Eq.

第 l 層の面数 $n_l(t) = N(t)p_l(t)$ の変化量は

$$\begin{aligned}\Delta n_l &\stackrel{\text{def}}{=} N(t+1)p_l(t+1) - N(t)p_l(t), \\ &= 4p_{l-1}(t) - p_l(t).\end{aligned}$$

十分大きな t では $N(t) = N_0 + 3t \approx 3t$ より,

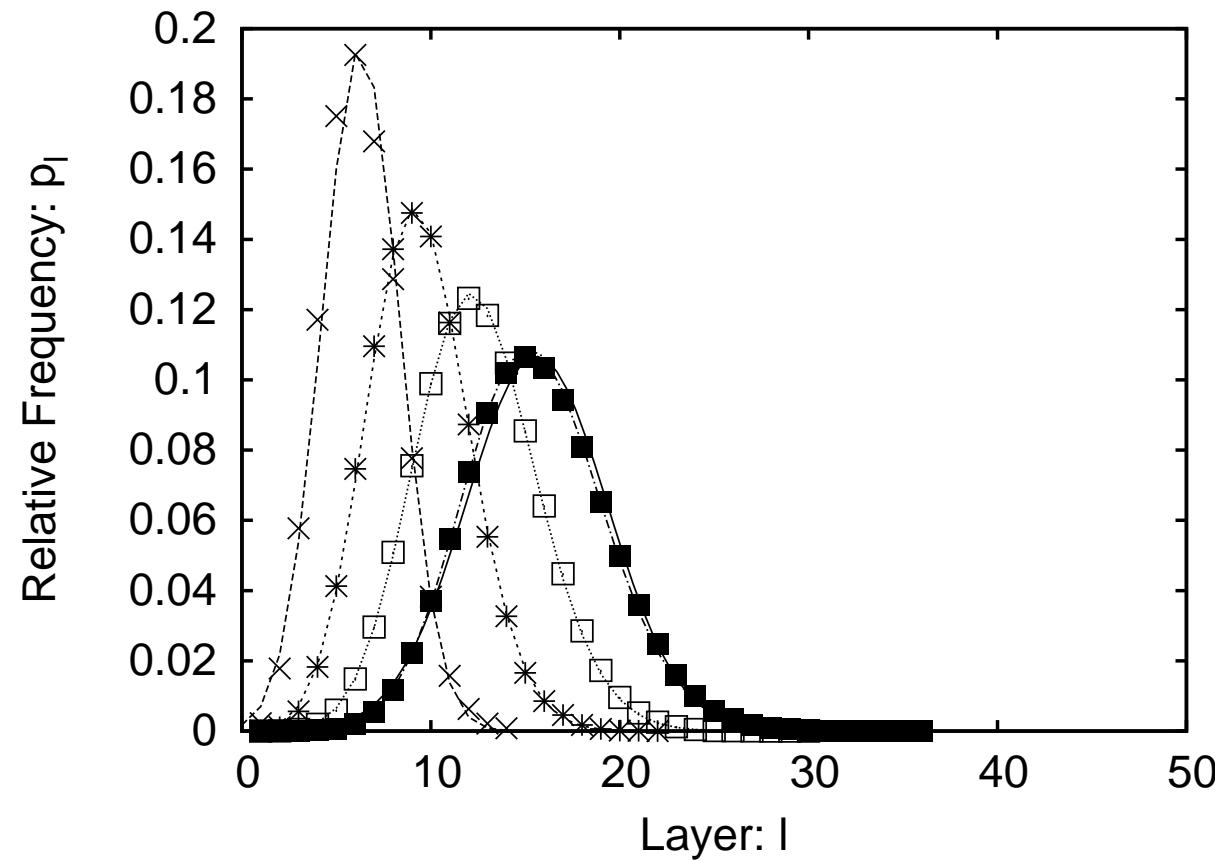
$$(*) \quad p_l(t+1) - p_l(t) = -\frac{4}{3t}(p_l(t) - p_{l-1}(t)),$$

を数値的に解けば良い

Y.Hayashi, IEICE Trans. Fundamentals, Vol.E94-A, No.2, 2011

Numerical Fitting

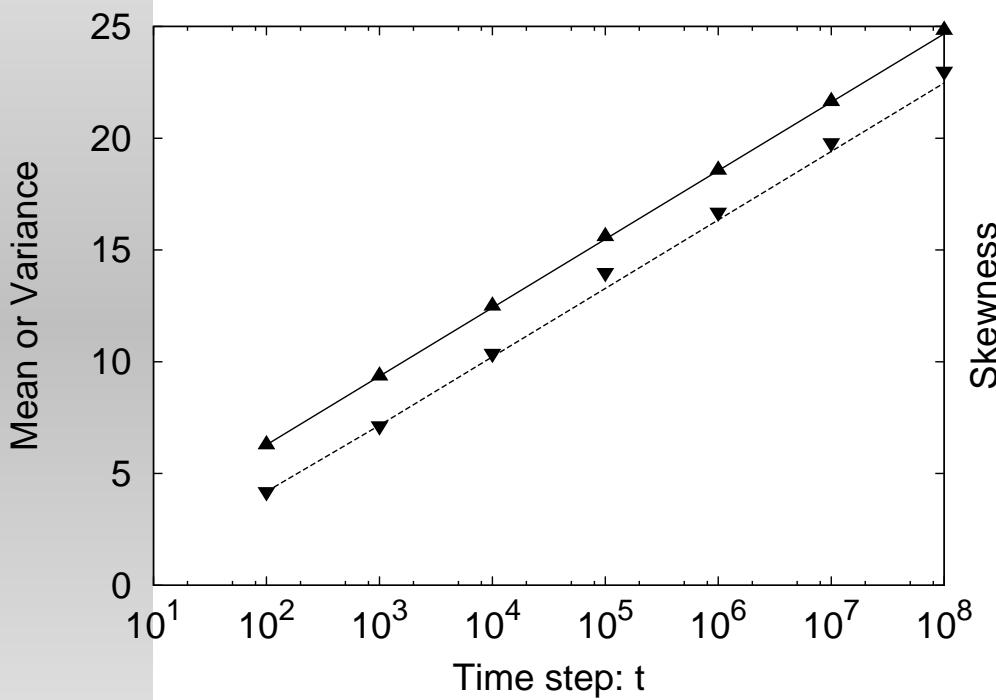
差分方程式の解（点線）はマルコフ過程の平均値（マーク記号）と非常に良くフィットする！



\times , $*$, open and closed \square : $t = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$

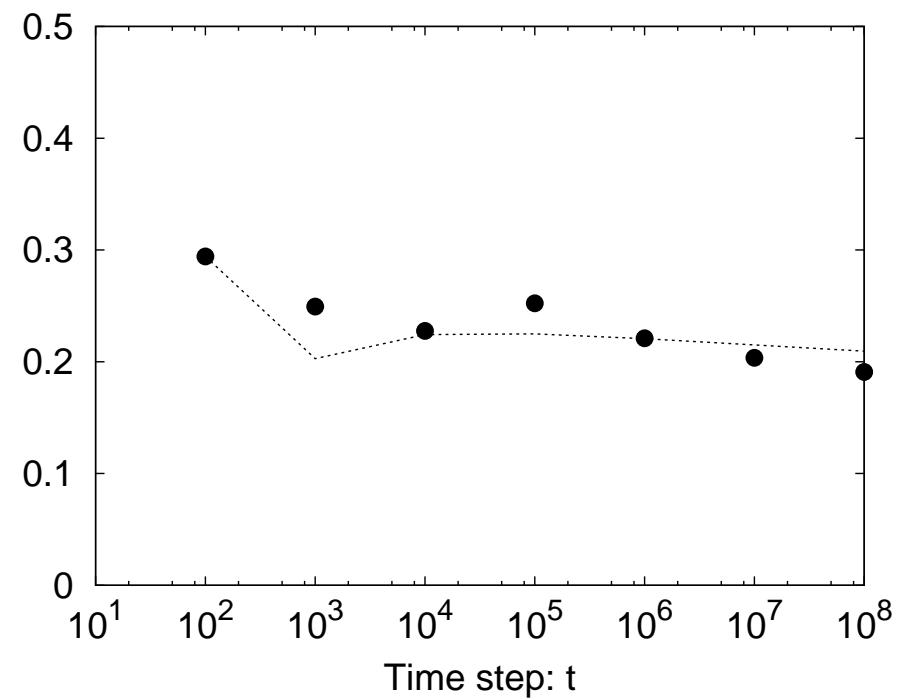
Positive Skewness

平均と分散は $\log t$, 歪度 $\text{Skewness} \approx 0.2$
(\times : Markov chain, \square : diff. eq. (*))



Mean & Variance

\triangle : mean, ∇ : variance for the Markov chain, the lines for the diff. eq. (*)



Skewness

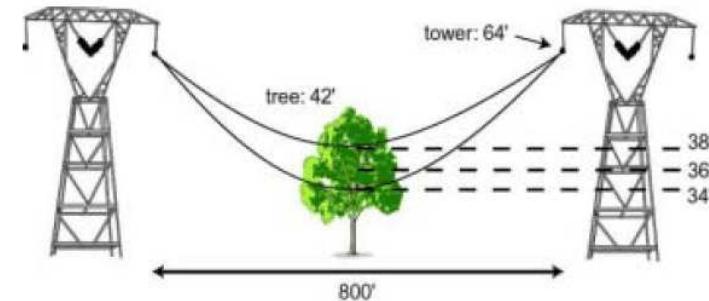
6. まとめ

- 現実の多くのネットワークに潜む SF 構造の頑健性: 不慮の故障に強くハブ攻撃に弱い結合耐性, 経済的かつ効率的な特性等をサーベイ
- 現状の地理的 SF モデルを整理し, 地理的制約による脆弱化の理論予測と実験結果を紹介
- 少量のショートカット追加による劇的改善と, そのバックボーン機能を提示
- 自己相似な細分による
ネットワーク自己組織化法]を提案し, 最適に
近い結合耐性, t-spanner 性, 効率的な分散ルーティングの優れた特性を提示
- 上記のフラクタル解析など, 今後の発展性を示唆

付録 1. Cascading Failure

許容量を越えた被害伝搬

- 電力崩壊: 初期断線からの広域停電
- 道路やパケットの渋滞
- ⋮



2003年8月14日北米北東部停電事故に関する調査報告書, 2004年3月北米北東部停電調査団 (NERC “August 14 2003 Blackout”), 及び, 北米東部大停電について, IEEJ 2003年8月.

付録2. Avalanche Dynamics

