修士論文

玉葱状ネットワークの逐次成長法における高次数ノードの分散化の検討

岡田　昌樹

主任研究指導教員　　　林　幸雄

北陸先端科学技術大学院大学
金沢大学
(融合科学)

令和３年３月

目次

図目次

付録

表目次

第1章 はじめに

1.1 研究背景

電力網，通信網，ソーシャルネットワークなどの現実の多くのシステムは，ある要素を示すノード(点)と，それらのつながりを示すリンク(線)で構成されるネットワークとして表現される。特に，21 世紀初頭頃に判明したことであるが，現実の多くのネットワークはスケールフリー性という共通した構造を持ち，他の多くのノードに比べて極端に多くのリンクを持つハブが存在することが知られている[1]。一方で，スケールフリーネットワークは，リンクを多く持つノードから順に除去する悪意のある攻撃に対して非常に脆弱であり, 数%のノード除去に対してですら連結性を失うことが知られている[2]。したがって，連結性を前提として機能を提供しているネットワークシステムは，ばらばらになるとその機能を喪失する危険がある。現実には災害やテロ攻撃など, ネットワークが連結性を失う原因となるリスクが多数存在しているため，スケールフリーネットワークの脆弱性が特に重要な課題となっている。そこで, 災害や悪意のある攻撃に対しても頑健なネットワーク構造とその構築方法が研究されている。

一方, 数値シミュレーションとパーコレーション解析により, 正の次数相関によって特徴づけられる玉葱状ネットワークが攻撃に対する最適耐性を持つことが近年発見された[3][4]。現在，スケールフリーネットワークに代わる頑健なネットワークとして近未来のネットワークに適用できるよう，玉葱状ネットワークの構築方法が研究されている[5][6][7][8][9]。その中でも, 仲介に基づく逐次成長法と呼ばれる，ノードを一つずつネットワークに追加して玉葱状ネットワークを構築する手法は他に比べてネットワーク構築するコストが低く，ノード数の調整が柔軟であることから注目されている[8][9]。さらに，ノード集合が表面成長するという制約により，現実の多くのネットワークのように空間上にノードを埋め込んだ場合でも，玉葱状ネットワークを創発することが上記の手法の拡張として確認されている[10][11]。しかしながら，表面成長の制約の下では高次数ノードがネットワークの中心に集中することも分かっている。高次数ノードが中心に集中すると，悪意のある攻撃者はネットワークの形状からどの部分が弱点かを容易に推測できてしまうことが問題となる。

1.2 研究目的

そこで本研究では，先行研究に見つかった高次数ノードの集中という課題を解決するため，空間上にノードを配置しながら高次数ノードを分散化する玉葱

状ネットワーク構築法の提案を目的とする。皮膚のターンオーバーや細胞分裂によるバクテリアコロニーのパターン形成[12]に着想を得て，ノードが分裂するようにして増殖して，相互作用する手法を考える。また，提案手法によって構築したネットワークにおける玉葱状構造の創発と，構築したネットワークの特徴を検討する。

さらに，ネットワークのノードを複数除去する空間的な攻撃のモデルを提案する。ネットワークに対する従来の攻撃モデルは 1 つ 1 つノード除去を行うものであったが，しかしながら現実に生じる災害はネットワークの 1 ノードの除去ではなく，ある一定のエリアに存在する複数のノードを一気に除去するような被害をネットワークに与える点で質が異なっている。そこで，本研究では実際の災害により近い被害に対するネットワークの頑健性の測定を想定して，断層地震をモデル化した空間的な攻撃モデルを考える。

第2章 関連研究

2.1 スケールフリーネットワークとその脆弱性

一般に，ある要素を表す頂点であるノードと，それらを繋ぐ線であるリンクからなる構造物をネットワークという。例えば，発電所とそれらを繋ぐ電線からなる電力網，人と人同士のつながりを表すソーシャルネットワークなど，現実の至るところにネットワークがみられる。

本研究では，グラフ理論におけるグラフと同様に，ノード集合 V＝{v_1，v_2 ，v_3，……}とリンク集合 E＝{e_1，e_2 ，e_3，……}からなるグラフ G としてネットワークを扱う。但し，リンクの始点と終点が同一ノードである自己ループ，同じノード対の間にリンクを複数持つ多重辺を含まない単純グラフとする。また，各リンクについては重みをもたず，向きを考慮しない無向グラフとする。

ネットワークの構造は，隣接行列 A によって表現される。単純無向グラフの隣接行列はネットワークを構成するノード数を N として，N×N 行列で表現され，i 行 j 列目の要素a_{ij}が以下のように定義される。

$$\boldsymbol{A_{ij}} = \begin{cases} \mathbf{0} & \left(\text{ノード}\mathbf{i}\text{と}\mathbf{j}\text{の間にリンクがあるとき}\right) \\ \mathbf{1} & \left(\text{ノード}\mathbf{i}\text{と}\mathbf{j}\text{の間にリンクがあるとき}\right) \end{cases} \tag{2.1}$$

この定義から，隣接行列は無向グラフにおいては常に対称行列であり，対角成分は常に 0 である。

ネットワークの各ノードが持つリンクの数を次数といい，ノード i が持つ次数は隣接行列の要素A_{ij}を用いて次のように表される。

$$\boldsymbol{k_i} = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{A_{ij}} \tag{2.2}$$

現実の多くのネットワークは，極端に高い次数を持つノードであるハブが存在するスケールフリーネットワークであることが知られている[1]。一方，スケールフリーネットワークは次数の高い順にノードを除去するハブ攻撃などの悪意のある攻撃によって対して非常に脆弱であり，数%のノード除去により連結性を失い，ばらばらになってしまう[2]。これは連結性を前提としているネットワークシステムにとって大きな問題である。また，現実世界で重要な役割を担うネットワークシステムは異常気象やテロなどの年々増大するリスクに曝されてい

る。そこで，ダメージを受けても機能停止しづらい，より頑健なネットワークの構造やその構築方法が研究されている。

2.2 玉葱状ネットワークの特徴とその性質

頑健なネットワーク構造として，正の次数相関によって特徴づけられる玉葱状ネットワークが知られている。次数相関 r とは，隣接しているノード同士の次数の類似性の指標であり，隣接ノード間の次数についてのピアソン相関係数に他ならず，-1≦r≦1 の値を取る。M をネットワークの全リンク数，k_e と k'_e をあるリンク e の両端のノードの次数としたとき，次数相関 r は次のように表される[13]。

$$r = \frac{4M\sum_e(k_e k'_e) - [\sum_e(k_e + k'_e)]^2}{2M\sum_e\left({k_e}^2 + {k'_e}^2\right) - [\sum_e(k_e + k'_e)]^2} \tag{2.3}$$

玉葱状ネットワークは悪意のある攻撃に対して最適な結合耐性を持つネットワークであることが数値シミュレーションとパーコレーション解析の両方から示されている[4][5]。結合耐性，すなわちネットワークのノード除去に対する頑健性は頑健性指標 R によって測定することができる。頑健性指標 R は全体のノード数に対するノード除去率 q と，そのノード除去率における最大連結成分である S(q)を用いて次のように表される[3]。

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{q}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N}}}^{\boldsymbol{1}} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) \tag{2.4}$$

ここでΣの意味は q=1/N,, 2/M, ……である。

頑健性指標 R の取り得る範囲は 1/N ≦ R ≦ 0.5 となる。頑健性指標は除去ノードの選択基準，すなわち攻撃方法により値が異なる。本研究では，次数の高い順からノードを除去する次数順攻撃と，現状最も大きいダメージを与えられる，メッセージ伝搬に基づきループを破壊する BP 攻撃を採用して，それぞれに対する頑健性指標をR_{hub}，R_{bp}表記する。

2.3 玉葱状ネットワークの構築方法

玉葱状ネットワークの構築方法は大きく分けてリワイヤリング，マンダラネットワーク，逐次成長法の 3 つある。

リワイヤリングはネットワークのリンクを全て張り替えてネットワーク構造

を改変する手法である[5]。しかしながら，現実のネットワーク上でのリンクの張り替えには高いコストがかかるため，現実的ではない。

マンダラネットワークは外周のノードに対して倍々のノード追加を繰り返すことでネットワークを構築する手法である[6]。この手法は複数ノードを同時に追加する点に問題がある。

一方，逐次成長法は 1 つのノード追加とリンク接続の反復により成長しながらネットワークを自己組織化する手法である[7][8][9]。逐次成長法はリワイヤリングと異なり，リンク張り替えの必要がないためコストが低く，またマンダラネットワークと比較するとノード数の調整が柔軟であるためにより現実での使用に適していると考えられる。そこで本研究では，逐次成長法によるネットワーク構築に着目する。

上記の逐次成長法は 2 種類ある。まず，部分的なリンク先へのコピーとショートカットによるもので[7]，これはタンパク質の相互作用ネットワークから考案された Duplication-Divergence モデルを改変したものである。しかしながら，部分的なリンク先へのコピーとショートカットでは，ネットワーク構築の初期段階にネットワークの頑健性が低下する。

次に提案された仲介に基づく逐次成長法(MED)は，1997 年に発生したアイシン火災からのトヨタのサプライチェーンの復旧[14]などの組織論における仲介の重要性に着想を得て提案された手法である[8]。MED では，新規ノード追加と，新規ノードを仲介して 2 つのノードを接続するようなペアのリンク接続追加の繰り返しによりネットワークを構築する。その詳細は 3 章 1 節にて説明する。仲介に基づく逐次成長法は，部分的なリンク先へのコピーとショートカットにあった逐次成長の初期段階での頑健性低下は起きない。

上記の手法は，ネットワークのノードとリンクのみのトポロジーの観点から玉葱状ネットワークを創発するネットワーク構築手法である。一方で，電力網や通信網など現実のネットワークの多くは空間上にノードが埋め込まれており，空間上に埋め込む制約のなかでも玉葱状ネットワークが構築できるかどうかは自明ではない。そこで，表面成長という制約により空間上に埋め込まれたノード集合に MED を用いてネットワーク構築を行ったところ，玉葱状ネットワークの創発が確認されている[10][11]。この先行研究では，物理学における表面成長する物の代表的なモデルのうち，細胞分裂を模した Eden モデル[15]，岩石などの多孔質物体の中を浸透する液体のモデルである Invasion Percolation(IP)モデル[16]，樹枝状結晶やバクテリアコロニーのようなパターンを形成する Diffusion-limited aggregation (DLA)モデル[17]を用いている。

しかしながら，玉葱状ネットワークが創発する条件下では弱点となる高次数ノードがネットワークの中心に集中してしまうことも明らかになっている。し

たがって，悪意のある攻撃者はこの手法で作られたネットワークの形状が分かると，中心の弱点を容易に特定できる点が問題となる。

そこで本研究では，ネットワークの高次数ノードを分散配置する手法を考える。中心に高次数ノードが集まる原因は，逐次成長法の初期に追加された古株ノードが中心に集まり，そこにリンク接続が集中するためであると考えられる。したがって，本研究では，古株ノードの配置を分散化する新たな空間的なノード配置モデルを考え，高次数ノードの分散化を試みる。新たなモデルとして，皮膚のターンオーバーと生物学における細胞分裂[12]に着想を得て，空間的なノード追加モデルを提案する。

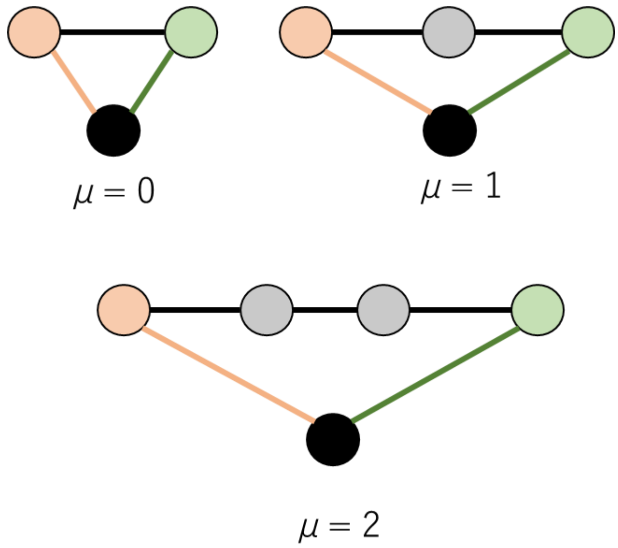
ここで，皮膚は複数の層に分かれており，一番内側の基底層で細胞分裂が行われ，新しい細胞に徐々に外側に押し出されて最後には垢として剥がれ落ちる仕組みをターンオーバーと呼ぶ[18]。この仕組みから，古いノードが内側から外へノードが押し出す。また，分裂した細胞が相互作用を行う仕組みのモデル化により，表面成長する物体の代表例であるバクテリアコロニーの形成パターンを再現した研究では，剛体の球として設定された細胞が分裂して，周りのノードと相互に押し合うことで，表面成長する物体のモデルである DLA モデルのような樹枝状のパターンの創発が確認されている。したがって，ノードが同じように分裂し，相互作用を行うことで表面成長とは異なる原理で自然なノード配置が可能であると考える。

第3章 提案手法

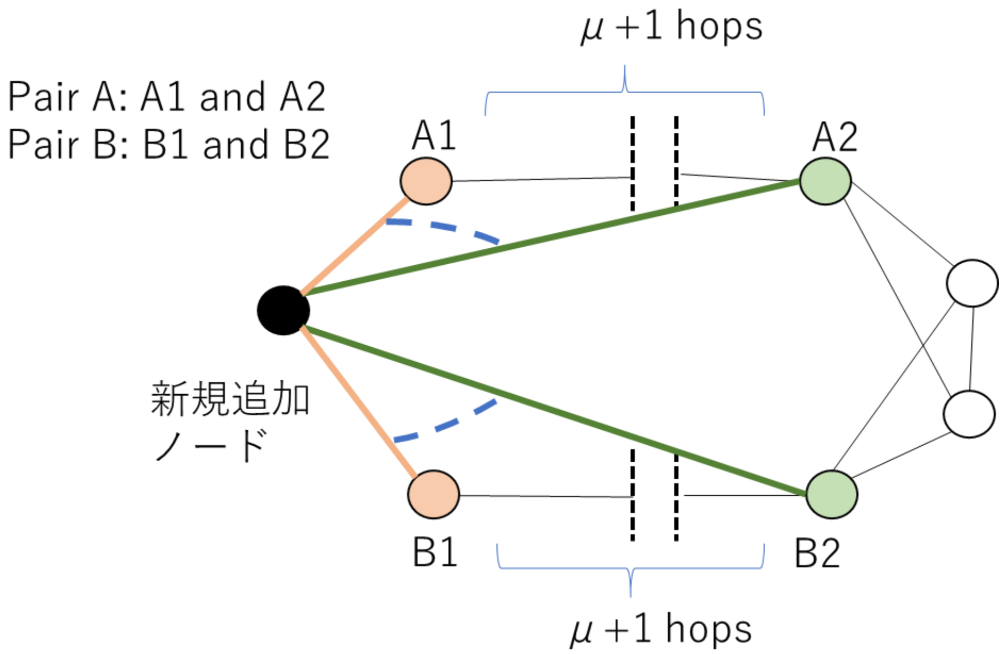
3.1 基本となるネットワーク構築手法

本節ではまず，ネットワーク構築のためのノードとリンク接続において基本となる，仲介に基づいた逐次成長法(MED)について説明する。

MED は組織論における仲介の有用性から着想を得て考案された手法である[8][9]。MED ではネットワークのノード集合に対する新規ノード追加と，リンク接続する m 本追加の繰り返しによりネットワークを構築する。その際，新規ノードを仲介して 2 つのノードが接続されるようにペアのリンク接続を行う。ペアのリンク接続では，1 本目をランダムなノードに，2 本目を 1 本目の対象ノードから μ+1 ホップ離れたノードに接続する(図 3.1(a))。この μ を仲介数と呼び，ここでは $\mu = 0 \sim 6$ の整数を取る。μ+1 ホップ先のノードが複数ある場合，その中で最も次数の小さいものを接続先として選択する方法は MED-kmin，ランダムに選択する方法は MED-rand と呼ばれる。本研究では MED-kmin, MED-rand の 2 つをネットワーク構築の基本的な手法と考えた。また，先行研究と同様に MED におけるノード追加時のリンク接続本数 m=4 とした(図 3.1(b))。これは MED によって玉葱状ネットワークを構築するために最小でも M=4 本のリンクが必要になるためである。MED では，ペアの 1 本目のリンク接続が低次数ノードと, 2 本目のリンク接続が高次数ノードとの接続性を高めることで次数相関が向上するため，玉葱状ネットワークが創発する。



(a)



(b)

図 3.1:仲介に基づく逐次成長法

3.2 空間上へのノード配置モデル

空間上にノードを埋め込むため，まずノード位置の基準となる正方格子と六角格子を設定する。

従来の研究[10][11]から空間上にノードを埋め込むために自然な表面成長の制約を課した結果，弱点となる高次数ノードが中心に集中することが分かっている。その主な原因は，逐次成長法の初期に追加された古株ノードが中心に集まり，そこにリンク接続が集中するためであると考えられる。したがって，本研究では，古株ノードの配置を分散化する新たな空間的なノード配置モデルの提案により，この問題の解決を試みる。生物学における細胞分裂[12]をベースとした空間的なノード追加モデルを提案する。選択されたノードが分裂すると同時に古いノードが押し出され，それに押し出されたノードも動く仕組みが基本となっている。具体的には次のステップによりノードを配置する。

Step 1: 初期ノードを配置する。
Step 2: 選択されたノードが分裂する方向をランダムに決定する。図 3.2 のように，正方格子の場合は 8 隣接方向，六角格子の場合は 12 方向の候補がある。
Step 3: 選択されたノードの位置に新規ノードを追加して，図 3.2 のように，その場所に存在したノードは Step2 で選択した方向に押し出される。
Step 4: 図 3.3 のように，Step3 で押し出されたノードの作用を受けるノードもまた同様に押し出され，移動する。
Step 5: Step2~4 を指定したノード数になるまで繰り返す。

Step 2 における分裂ノードの選択方法は，2 つの方法を考えた。1 つは一様ランダムな確率で選択するもの，もう 1 つはネットワークの空間的な中心からのみ分裂する手法である。これより以下では一様ランダムな確率で分裂ノードを選択する手法を一様分裂，ネットワークの中心からのみ分裂する手法を中心分裂と表現する。

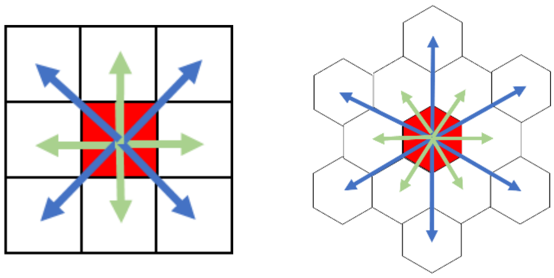
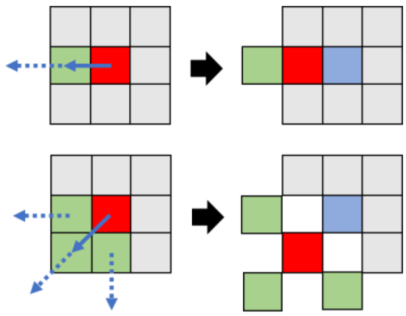


図 3.2:ノードの分裂可能な方向

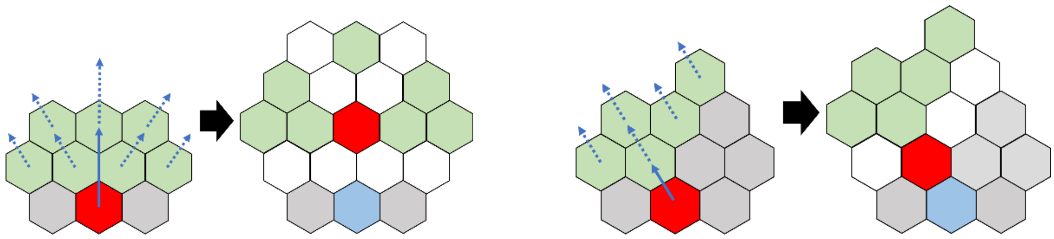
図 3.2 のノードの分裂可能方向は正方格子で 8 隣接方向，六角格子で 12 方向

としている。六角格子の場合，頂点方向の青い矢印の指しているノードは厳密には隣接しているわけではないが，押し出し効果を考えて，辺で隣接している 6 ノード(緑矢印方向)と頂点方向の 6 ノード(青矢印方向)を合わせた 12 ノードを六角形の隣接ノードとして扱う。

相互作用を図で表したものが図 3.3 である。



(a)



(b)

図 3.3:正方格子と六角格子における相互作用

上記の Step1~5 により，毎時刻に追加されたノードとリンクを接続する手法として MED-kmin, MED-rand を採用したものを，空間上へのノード配置を行うネットワーク構築モデルとして提案する。それらを以下にまとめる。

Step 1: 正方格子あるいは六角格子上に隣接する 5 つの初期ノードを配置して，すべてのノード対でリンク接続を行い初期構成として完全グラフとする。
Step 2: あるノードを選択し，分裂する方向を決定する。ノードの選択方法は，一様ランダムあるいは空間的な中心にあるノードのいずれか片方で区別する。
Step 3: Step 2 で選択された方向にノードが分裂して，その位置に存在した古いノードが押し出される。
Step 4: Step 3 で押し出されたノードの作用を受けるノードもまた同様に押し出されて移動する。
Step 5: Step 2 で分裂した新規追加ノードの 8 隣接位置に存在するノードから

ランダムに選択して，MED の 1 本目のリンク接続を行う。
Step 6:　Step 5 で接続したノードから仲介する μ+1 ホップ先のノードに MED の 2 本目を接続する。候補が複数ある場合，初めに定めた MED-kmin, MED-rand のいずれかにしたがって，すなわち MED-kmin では次数最小ノードを，MED-rand ではランダムに選択したノードを選択する。
Step 7:　Step 5, 6 を MED における追加リンク本数になるまで繰り返す。
Step 8:　Step 2~7 を指定したノード数になるまで繰り返す。

以上の提案手法を用いて構築したネットワークの特徴と玉葱状構造の創発について，シミュレーション実験を行い次章で検討する。

3.3 空間的な攻撃のモデル

ネットワークに対する攻撃として，テロ攻撃や災害などが考えられる。その中でも地震や台風などの災害は，ネットワークのノードを一つ一つ除去するのではなく，ある範囲内の複数のノードを除去する空間的なダメージを与える。これを空間的な攻撃と呼ぶ。

本節では，一つ一つのノード除去よりも現実のダメージに近い空間的な攻撃に対するネットワークの脆弱性を検討するため，空間的な攻撃モデルを構築する。様々な災害があるが，本論文では断層地震をモデル化した攻撃を提案する。地震の空間的な攻撃のモデル構築には，地震の頻度とマグニチュードの関係式であるグーテンベルグリヒター則(G-R 則)と，地震のマグニチュードとその地震を発生させる断層長の関係式である松田式を利用する。

G-R 則は地震の回数と規模(マグニチュード)の関係式であり，マグニチュードが M~M+dM の地震の回数は，定数 a, b を用いて次式で表される[19]。

$$log_{10}n(M) = a - bM \tag{3.1}$$

また，これは N(M)を M 以上の地震の累積回数，$A = a - log_{10}(b/log_{10}e)$とすると次のように書き換えられる。

$$log_{10}N(M) = A - bM \tag{3.2}$$

本研究では，日本の地震の研究を参考に，(3.1)式における a=5.0，b=0.8 を採用した。

表 3.1: 日本での G-R 則の a 値と b 値

参考文献	b 値	a 値
[20]	0.8	5.69
	0.75	5.36
	0.67	5.06
	0.7	4.3
[21]	0.83	-
	0.79	-
	0.97	-

一方，松田式は地震のマグニチュードとその地震を発生させる断層長の関係式であり，地震のマグニチュードを M，断層長を L[km]として次式で表される[22]。

$$log_{10}L = 0.6M - 2.9 \tag{3.3}$$

(3.1)式と(3.3)式を用いて，以下では具体的な地震の空間的攻撃のモデルを提案する。地震の空間的攻撃モデルは大きくネットワーク構築と攻撃の部分に分かれる。

ネットワーク構築では，基準格子上でのネットワークの構築と，攻撃のためのノード間距離の無次元から長さの単位[km]への変換を行う。基準格子上でのネットワークの構築は，前節での提案手法を用いる。本研究ではノード数 N=2000 のネットワークを構築する。次に，G-R 則からある回数起きる地震のマグニチュードを，松田式からその地震の発生源となる断層長をそれぞれ求め，その断層長を基準にして無次元のノード間距離を長さ[km]に変換する。本研究では 5 年に一度の確率で起きる地震のマグニチュードから生じる断層長が，ネットワークのノード集合における横または縦の最大ノード数の 1/4 となるようノード間距離を設定する。ここで，1/4 としたのは攻撃のサイズがネットワークの大きさを大きく超えず，また攻撃として機能しないような小さすぎるサイズでないようにするためである。

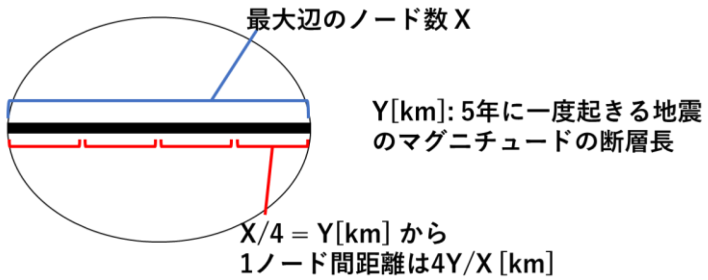


図 3.4:無次元のノード間距離の長さ[km]への変換

一方，攻撃の部分では，ネットワークに直撃するように攻撃するため，ネットワークの初期ノードを配置した中心付近に断層の中心が生じるとする。ここで中心付近の範囲は，正方格子の場合は初期ノードを配置した基準格子の中心から 31 ノード×31 ノードの正方形，六角格子の場合は 61×61 ノードの正方形とした。それぞれ 31，61 という数字を採用した理由は，N=2000 のとき，縦または横の最大ノード数が正方格子で 60 程度，六角格子で 130 程度になるため，その半分くらいのサイズを採用した。これは攻撃を確実にネットワークに当てるための工夫である。六角格子は最大ノード数のばらつきが大きいため，半分よりも少し小さめに範囲を取る。その範囲内の 1 ノードを起点として，45°区切りの傾きでマグニチュードに比例した長辺，短辺は最隣接ノード間距離で 2 ノード分の長方形の断層が発生し，その範囲内に存在するノードを除去する。角度について，現実にはどの方向にも生じる可能性があるが，単純化のため 45°区切りとする。短辺を最隣接ノード間距離の 2 倍とするのは，恣意性を排除して攻撃範囲を決定するためである。これを本研究では 30 年間とした規定年数繰り返し，各攻撃による最大連結成分を記録する。1 年間に生じる地震の回数は G-R 則から求められる。例えば，今回採用した定数値，a=5.0，b=0.8 ではマグニチュード 5 以上の地震は約 5 回であることから, 1 年間に 5 回の攻撃が加えられる。マグニチュード 5 以上に限定した理由は，2 つある。1 つはある一定回数以下の地震を考慮せずにそれ以上のマグニチュードの地震から G-R 則の a 値，b 値が算出されているからである。もう 1 つは地震自体の規模が小さい場合には，そもそも地震によるダメージが生じないと考えられるためである。これらの理由から，マグニチュード 5 以上の地震のみを攻撃として捉える。各攻撃でのマグニチュードは, G-R 則からマグニチュード 5.0 以上 9.0 未満の範囲で 0.1 刻みでの各地震の回数を計算した後，合計回数でそれぞれの回数を割って離散確率分布として，一様乱数を利用して算出する。

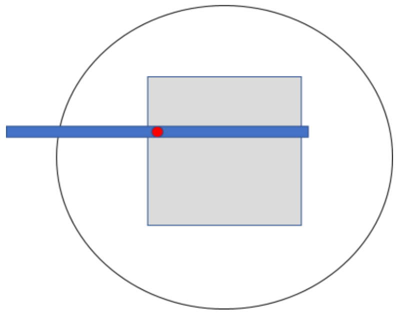


図 3.5:ネットワーク内(円)の断層の中心(赤)が生じる範囲(正方形)と断層(青)

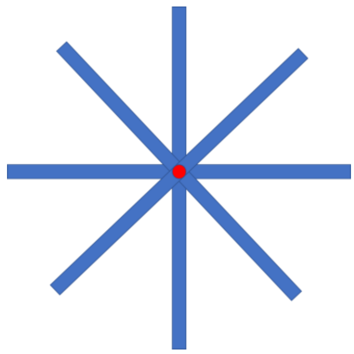


図 3.6:断層の取り得る角度

以下に，地震による空間的な攻撃モデルの手順を示す。

Step 0：13 頁に記載した提案手法によりネットワークを構築する。G-R 則から 1 年間に起きるマグニチュード 5 以上 9 未満の地震の回数 x を求める。次に，マグニチュード 5 以上 9 未満の範囲において 0.1 刻みで各マグニチュードの地震が 1 年に起きる回数を計算して，各マグニチュードでの地震回数を x で割ることで，頻度確率として離散確率分布を求める。この離散確率分布から，発生確率が 5 年に 1 度に最も近い地震のマグニチュードを求める。

Step 1：Step 0 で求めた 5 年に 1 度の地震のマグニチュードの断層長を松田式から計算して，その長さがネットワークのノード集合の縦または横の最大ノード数の 1/4 となるようにして，無次元のノード間距離を[km]に変換する。

Step 2：攻撃年数を y 年間と決め，x×y 回の攻撃(Step 3~6)を繰り返す。

Step 3：0 以上 1 以下の一様乱数 p を出力し，step 0 で得た離散確率分布を用いて地震攻撃のマグニチュードを求める。例えば最小であるマグニチュード 5.0 の地震の発生確率が 0.3 としたとき，0≦p≦0.3 であればその時のマグニチュードは 5.0 とする。その次に小さいマグニチュード 5.1 の地震の発生確率が 0.2 としたとき，0.3＜p≦(0.3+0.2)=0.5 であればマグニチュード 5.1 の地震が発生するとする。

Step 4：ネットワークの中心からある辺の長さを持つ正方形(正方格子なら 31×31 ノード，六角格子なら 61×61 ノード)を取り，その範囲内からランダムに 1 つのノードを選択する。

Step 5：そのノードを中心に，長辺を Step 3 のマグニチュードによって生じる断層長，短辺を最隣接ノード間距離×2 とした長方形を，45°刻みの一様ランダムな角度で発生させる。この範囲内にあるノードを除去する。

Step 6：最大連結成分を記録する。

第4章 実験・評価

本章では提案手法によって構築したネットワークの特徴を示す各指標を測定し，評価を行った。次数分布，次数順攻撃に対する頑健性指標R_{hub}と BP 攻撃に対する頑健性指標R_{bp}，次数相関 r を測定した。ここでは次数順攻撃に対する頑健性指標R_{hub}と次数相関 r が十分に高いとき玉葱状ネットワークの創発と考えられる。より具体的には，頑健性指標$R_{hub} \geqq 0.3$かつ次数相関$r \geqq 0.2$の場合，それぞれの指標は十分に高いとした[8]。BP 攻撃に対する頑健性指標R_{bp}については極端な頑健性低下の有無を確認するために求めた。

ネットワークの構築は，

・格子の形状・・・・・・・・・・・　正方格子，六角格子の 2 つ

・分裂するノード選択方法・・・・　一様分裂，中心分裂の 2 つ

・MED の種類・・・・・・・・・・　MED-kmin，MED-rand の 2 種類

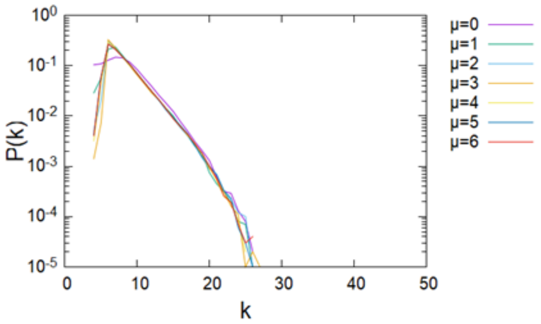
・MED の仲介数μ・・・・・・・・　$\mu = 0$~6 の 7 パターン

のそれぞれの組み合わせで行った。しかしながら，正方格子については中心分裂によって作られるノード集合が，中心から 8 隣接方向のみ成長する特殊な形状であったため断層地震に対する実験に適さず，正方格子の中心分裂については検討しなかった。

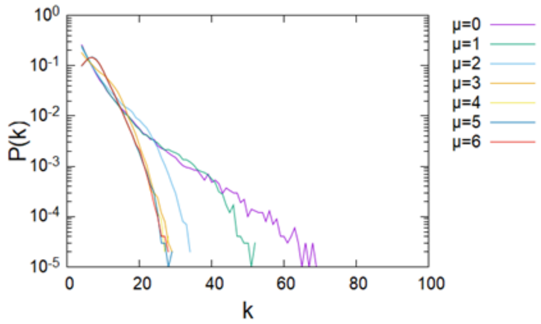
また，以下の結果はすべて特別に明記しない限り 100 回平均を取ったものである。

4.1 提案手法によるネットワークの次数分布

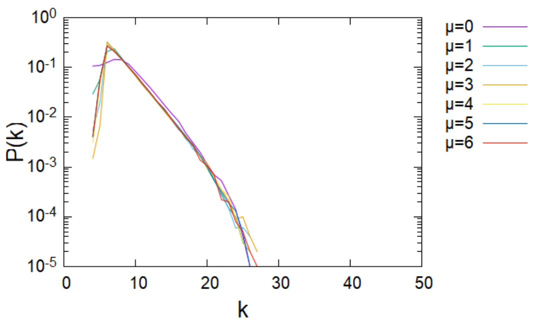
まず，ネットワークを構成するノード数 N=1000 までネットワークを構築した際の次数分布を以下に示す。



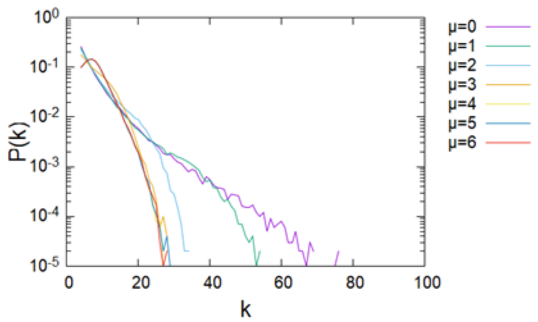
(a) 正方格子, MED-kmin



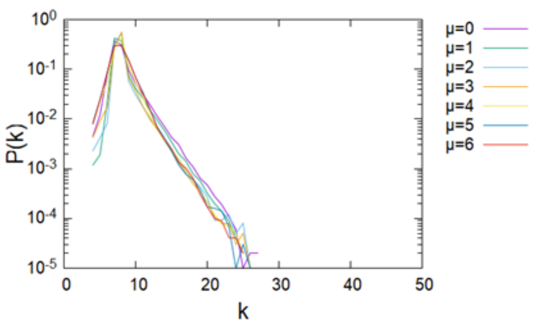
(b) 正方格子, MED-rand



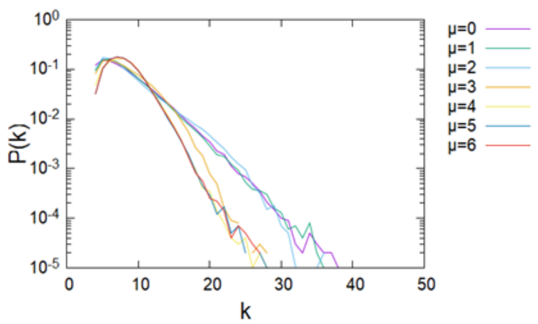
(c) 六角格子, 一様分裂, MED-kmin



(d) 六角格子, 一様分裂, MED-rand



(e) 六角格子, 中心分裂, MED-kmin



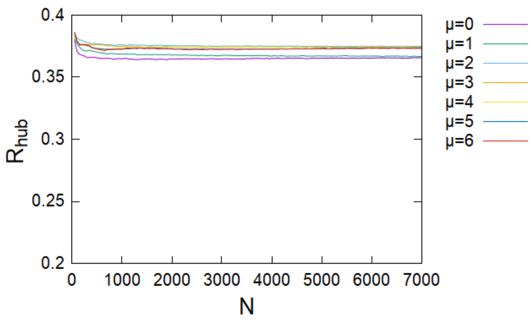
(f) 六角格子, 中心分裂, MED-rand

図 4.1：提案手法によって構築したネットワークの次数分布(N=1000)

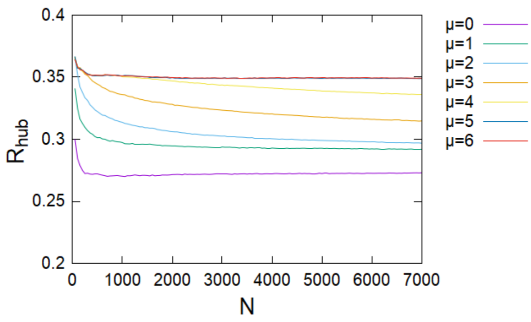
MED-kmin の場合，図 4.1 の(a), (c), (e)を見ると正方格子，六角格子の一様分裂，および，六角格子の中心分裂のいずれの場合でも次数は大きくても 25 を少し超える程度であり，分布の裾野は短い。一方，MED-rand の場合は図 4.1 の(b), (d)より，正方格子と六角格子の一様分裂の場合，仲介数μが小さいと分布の裾野が長くなっている。μが小さいとき，ランダムに選択したノードの隣接ノードの中からランダムに選択したノードを対象にリンクを接続すると，結果的に次数を多く持つノードにリンクが集まる優先的選択となるためである。MED-rand の場合であっても$\mu \geqq 3$ になると，どの条件においても最大で次数 30 程度に抑えられている。また，六角格子の中心分裂ではμが小さいときでも裾野がある程度抑えられている点が特徴的である。

4.2 提案手法によるネットワークの頑健性

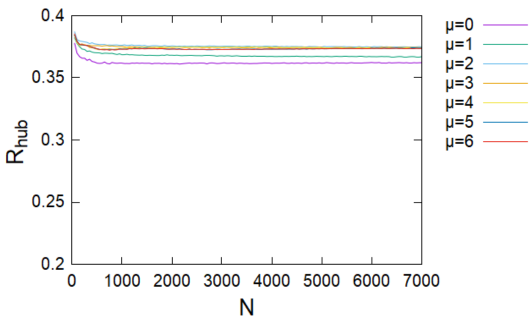
頑健性指標R_{hub}，R_{bp}はそれぞれ以下の図 4.2，4.3 に示す。



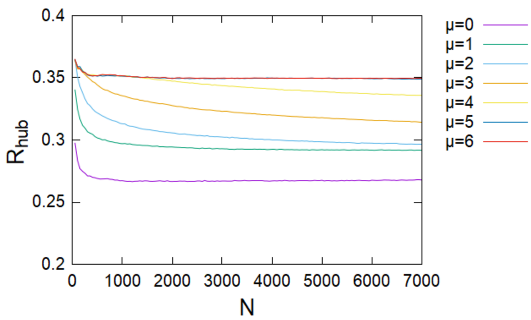
(a) 正方格子, MED-kmin



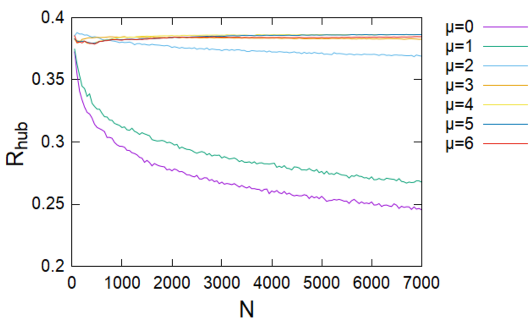
(b) 正方格子, MED-rand



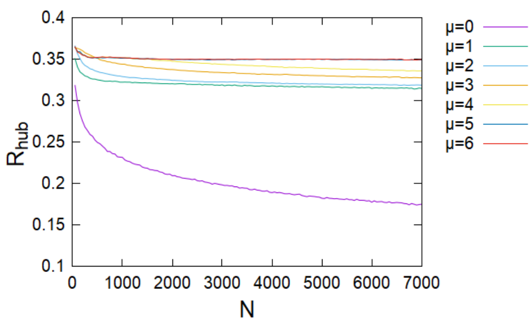
(c) 六角格子，一様分裂, MED-kmin



(d) 六角格子，一様分裂, MED-rand

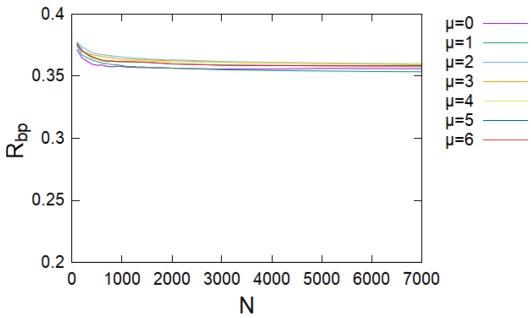


(e) 六角格子，中心分裂, MED-kmin

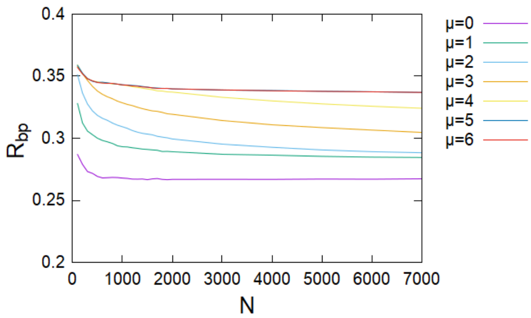


(f) 六角格子，中心分裂, MED-rand

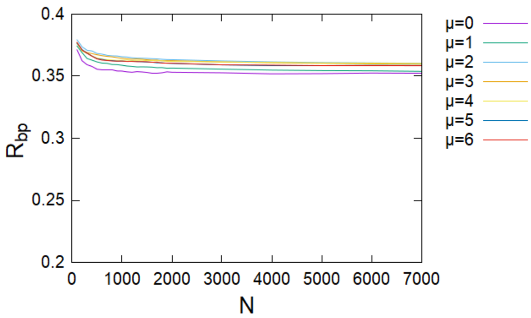
図 4.2：提案手法によって構築したネットワークの頑健性指標R_{hub}



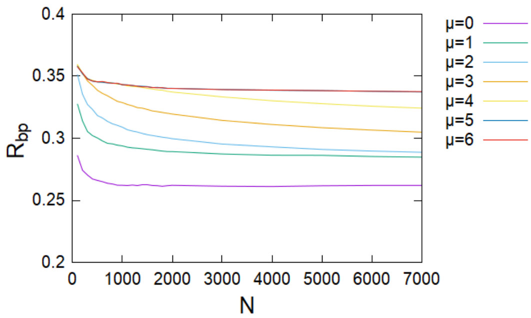
(a) 正方格子, MED-kmin



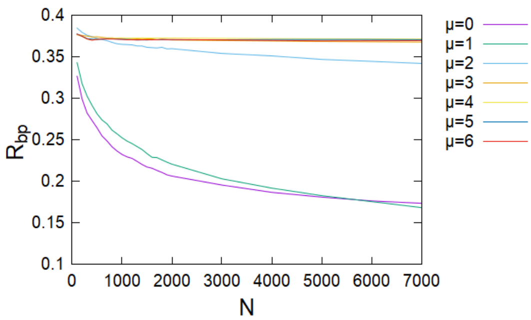
(b) 正方格子, MED-rand



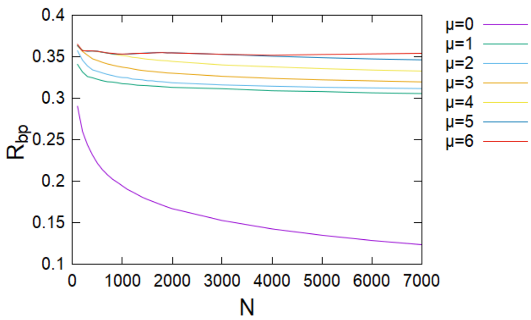
(c) 六角格子, 一様分裂, MED-kmin



(d) 六角格子, 一様分裂, MED-rand



(e) 六角格子, 中心分裂, MED-kmin



(f) 六角格子, 中心分裂, MED-rand

図 4.3： 提案手法によって構築したネットワークの頑健性指標R_{bp}

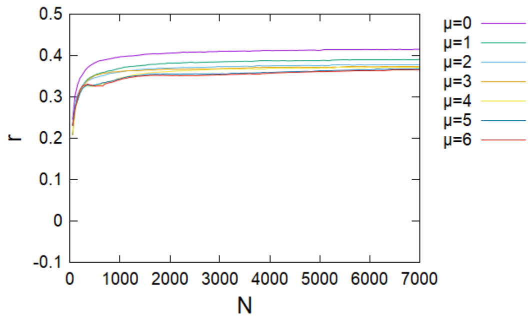
図 4.2 から，次数順攻撃については，まず全体の傾向として MED-kmin の方が MED-rand よりも高い頑健性を持つことが分かる。これはトポロジーのみの先行研究と同様の傾向であり，その特徴を引き継いでいることが頑健性の違いが生じる要因の 1 つであると考えられる[10][11]。MED-rand 図 4.2(a)と(c)より，MED-kmin では正方格子と六角格子の一様分裂は同程度の頑健性を示している。同様に，図 4.2(b)，(d)から MED-rand でも正方格子と六角格子の一様分裂は同程度の頑健性である。一方で，六角格子の中心分裂では MED-kmin，MED-rand ともに μ が極端に小さいとき(MED-kmin では $\mu = 0$ と $\mu = 1$，MED-rand では $\mu = 0$)，頑健性の大幅な低下が見られる。これは次節で述べるように，六角格子の中心分裂で μ が小さいとき，次数相関が低く玉葱状ネットワークが創発していないためである。MED-kmin においては $\mu \geqq 3$ の場合，正方格子や六角格子の一様分裂よりも六角格子の中心分裂は高い頑健性を示している。また，MED-rand における六角格子の中心分裂の頑健性は，$\mu \geqq 1$ で正方格子や六角格子の一様分裂よりも高い。

以上をまとめると，頑健性指標 R_{hub} が玉葱状ネットワークの創発の必要条件である 0.3 以上を満たしたのは，MED-kmin では正方格子と六角格子の一様分裂で全ての μ の場合，六角格子の中心分裂で $\mu \geqq 2$ の場合であり，MED-rand では正方格子，六角格子の一様分裂で $\mu \geqq 3$ の場合，六角格子の中心分裂で $\mu \geqq 1$ の時であると言える。

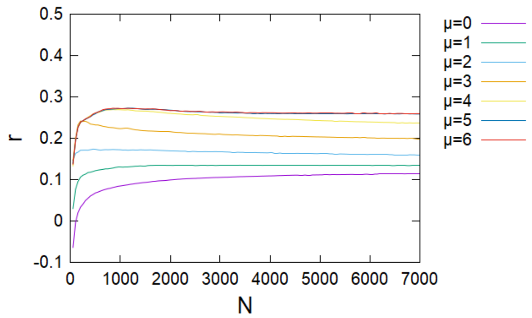
図 4.3 から BP 攻撃についてみると，全体的に頑健性指標は下がっているものの，次数順攻撃と類似した傾向がみられ，BP 攻撃に対しても頑健なネットワークが構築されると言える。また，六角格子の中心分裂で μ が小さい場合に顕著だが，玉葱状ネットワークでないものは玉葱状ネットワークに比べて頑健性が大きく低下していることがわかる。

4.3 提案手法によるネットワークの次数相関

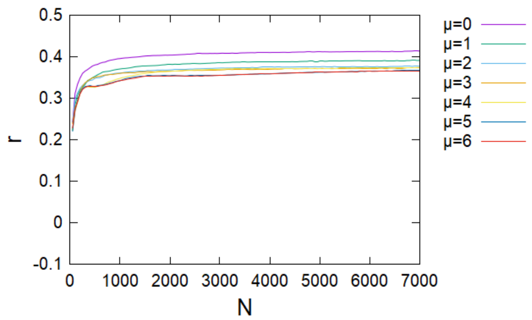
ネットワークの次数相関は以下の図 4.4 に示す。



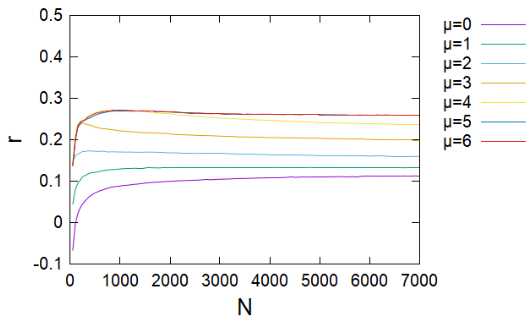
(a) 正方格子, MED-kmin



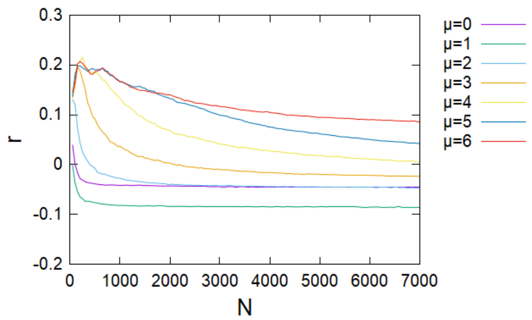
(b) 正方格子, MED-rand



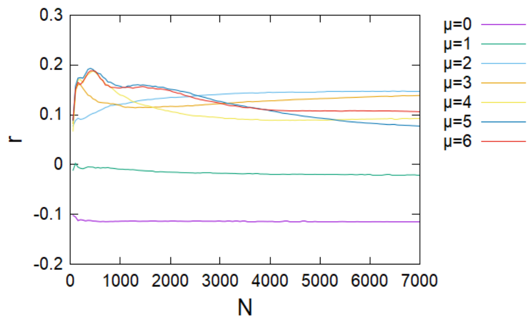
(c) 六角格子, 一様分裂, MED-kmin



(d) 六角格子, 一様分裂, MED-rand



(e) 六角格子, 中心分裂, MED-kmin



(f) 六角格子, 中心分裂, MED-rand

図 4.4：提案手法によって構築したネットワークの次数相関 r

図 4.4(a), (c)より, MED-kmin において正方格子と六角格子の一様分裂はそれぞれの μ の値で同程度の次数相関を持つ。図 4.4(b), (d)から, MED-rand の正方格子と六角格子の一様分裂においても同様である。また, 正方格子と六角

格子の一様分裂においては，図 4.4(a)(c)と(b)(d)の比較から，MED-kmin の方が高い次数相関を持つ。一方で，図 4.4(e)，(f)は六角格子の中心分裂によって構築されるネットワークは一様分裂によるものと異なり，MED-kmin よりも MED-rand の方が高い次数相関を示している。

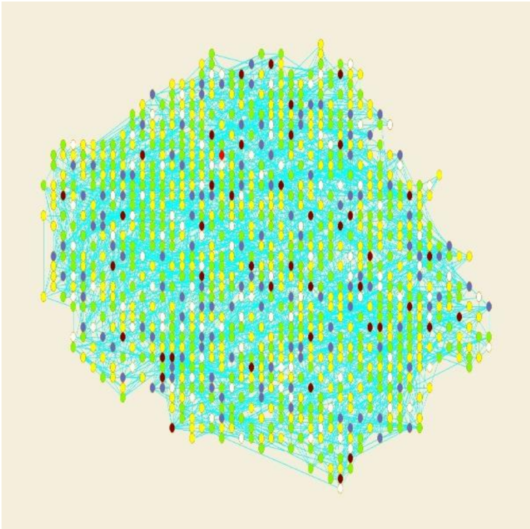
玉葱状ネットワークの創発の必要条件は次数相関 $r \geqq 0.2$ と考えられる[8]。MED-kmin では正方格子と六角格子の一様分裂で全ての μ が $r \geqq 0.2$ である。MED-rand では正方格子と六角格子ともに一様分裂で $\mu \geqq 3$ のとき，十分に高い次数相関となっている。一方，六角格子の中心分裂では，MED-kmin，MED-rand のいずれの場合にも次数相関 $r \geqq 0.2$ に満たない。

したがって，玉葱状ネットワークが創発したのは MED-kmin の場合，正方格子と六角格子の一様分裂における μ が $0 \leqq \mu \leqq 7$，MED-rand の場合，正方格子と六角格子の一様分裂の $\mu \geqq 3$ の時と言える。中心分裂の時は頑健性が高い一方で次数相関が低く，玉葱状ネットワークは確認されていない。

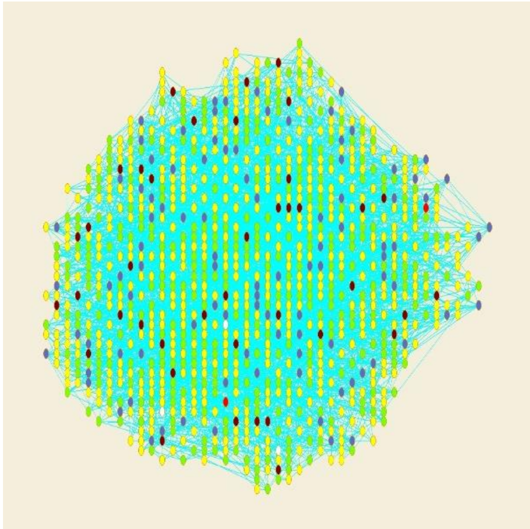
4.4 高次数ノードの空間的な分散化

本節では，提案手法によって構築したネットワークを可視化することで，高次数ノードの空間的な分散化を確認する。

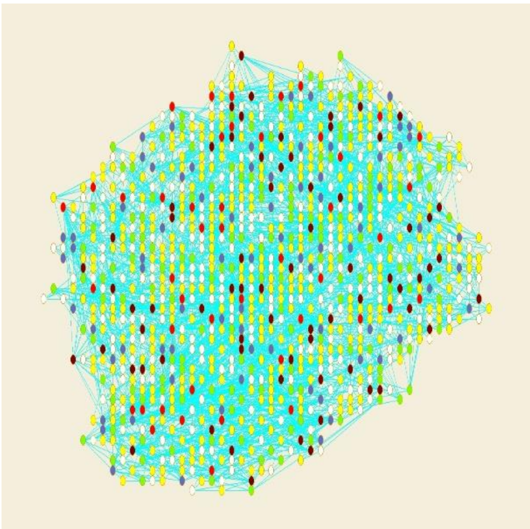
正方格子の一様分裂，六角格子の一様分裂，六角格子の中心分裂の各条件で構築したネットワーク図を以下の図 4.5～4.7 に示す。ノードの色が次数を表しており，白が 4，黄が 5~7，緑が 8~10，灰が 11~13，茶が 14~19，赤が 20 以上とする。またリンクは水色とする。



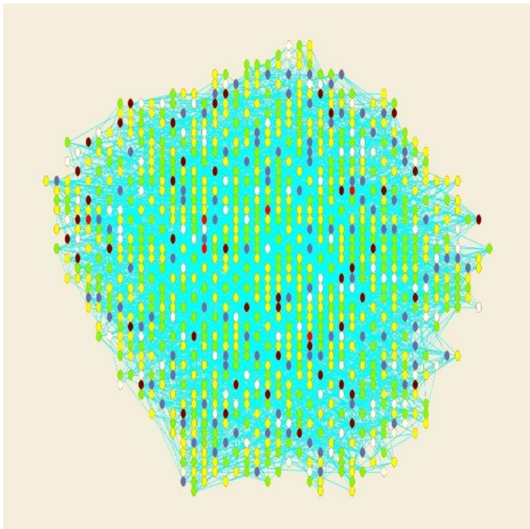
(a) MED-kmin μ=0



(b) MED-kmin μ=6

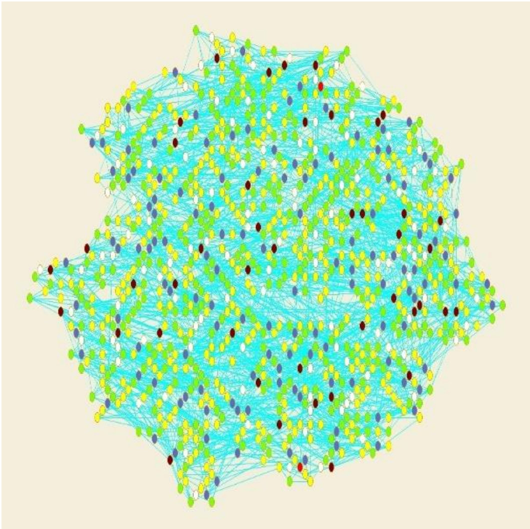


(c) MED-rand μ=0

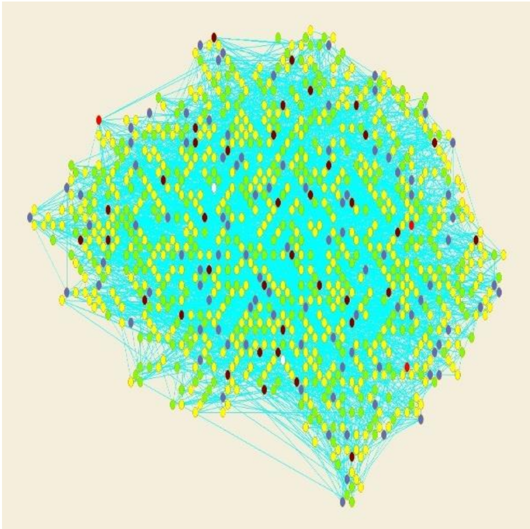


(d) MED-rand μ=6

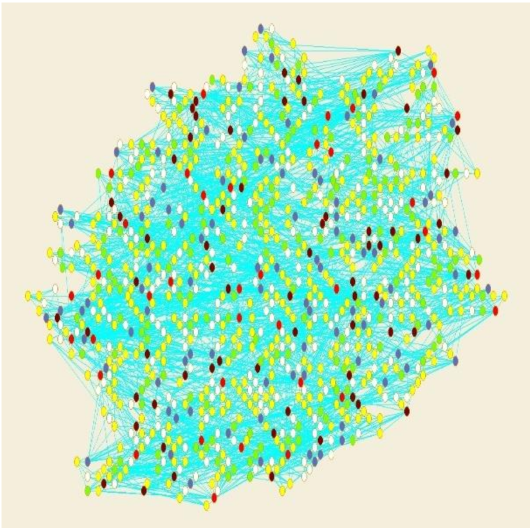
図 4.5：正方格子，一様分裂のネットワーク図



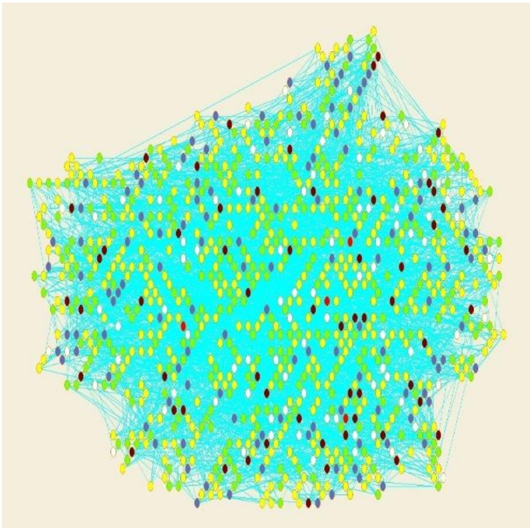
(a) MED-kmin　μ=0



(b) MED-kmin　μ=6

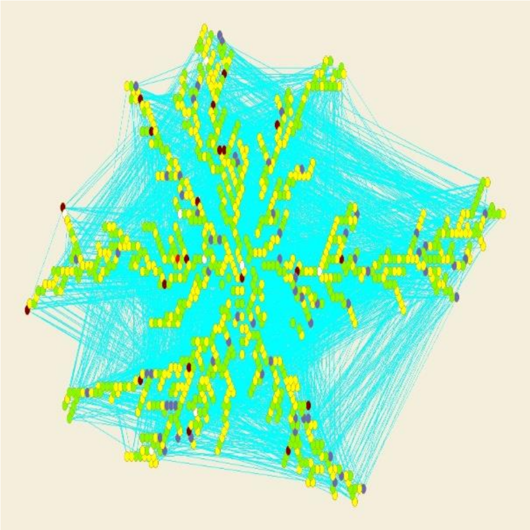


(c) MED-rand　μ=0

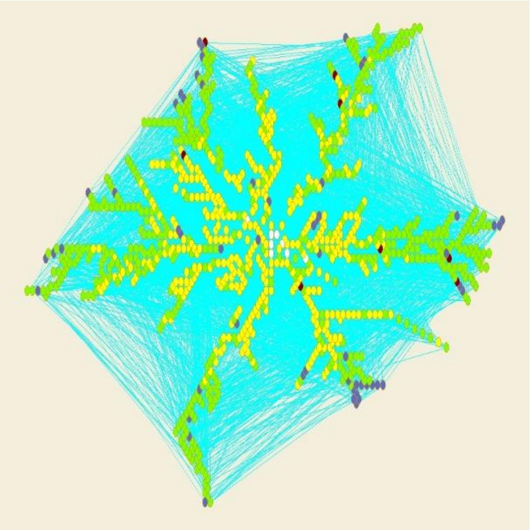


(d) MED-rand　μ=6

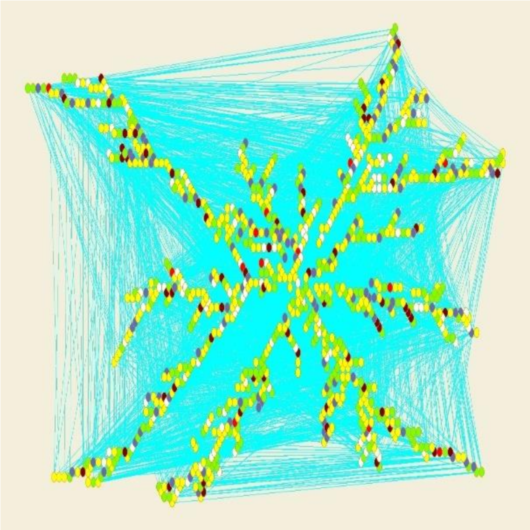
図 4.6：六角格子，一様分裂のネットワーク図



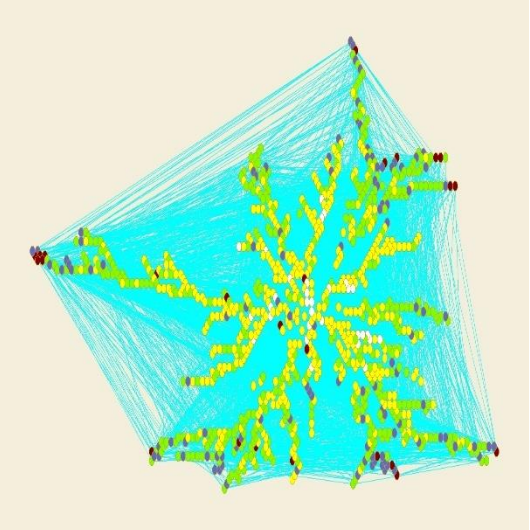
(a) MED-kmin　μ=0



(b) MED-kmin　μ=6



(c) MED-rand　μ=0



(d) MED-rand　μ=6

図 4.7：六角格子，中心分裂のネットワーク図

まず，図 4.5 と 4.6 より，一様分裂によって構築したネットワークは初期ノード位置を中心とした円形に成長している。六角格子を基準とした図 4.6 は正方格子を基準とした図 4.5 よりも隙間が多く，外側も枝のように入り組んだパターンが見られる。図 4.7 から，中心分裂は一様分裂によるネットワークの形状と大きく異なり，中心から枝のように伸びていくパターンが観測されている。これは樹枝状結晶やバクテリアコロニーをモデル化した DLA モデルによって形成されるパターンに類似している。

全体として，図 4.5~4.7 より，比較的高次数のノードである灰，茶，赤のノードがネットワークの中心付近に集まらず，分散化されていることが確認される。しかしながら，中心分裂では仲介数が大きくなると，中心から離れた枝の先の方に高次数ノードが集まっている。

図 4.5(a)では，次数最小である白のノードが多く，図 4.5 (b)では白のノードが少ないことから，正方格子，MED-kmin では仲介数 μ が大きいと次数が極端に小さいノードが減少する。また，図 4.5(c)では次数最小である白のノードと高次数である赤のノードが多く，図 4.5 (d)では白と赤のノードが少ないことから，正方格子，MED-rand では仲介数 μ が大きいと次数が小さいノードも大きいノードも減少する。これらは次数分布を表す図 4.1(a)(b)からも明らかである。図 4.5(a)(b)と(c)(d)の比較から MED-kmin と MED-rand の違いとして，MED-rand では MED-kmin よりも次数最小の白のノードが多い点が目立つ。

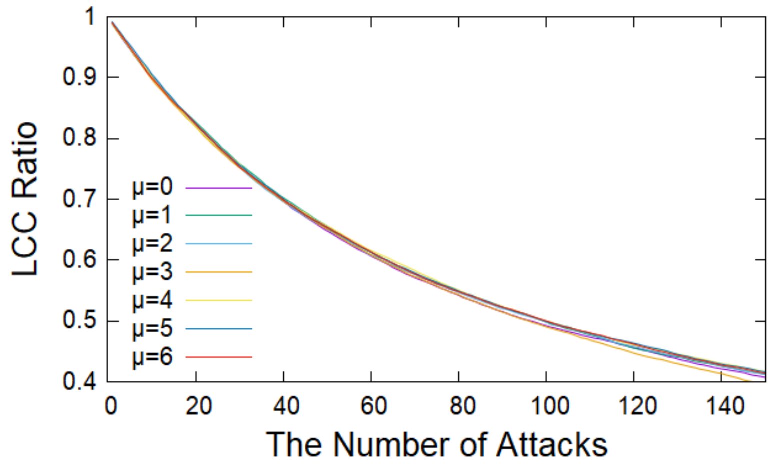
図 4.6 より，六角格子の一様分裂においても高次数ノードの分散について，正方格子の場合と同じ傾向が見られる。

図 4.7 より，六角格子の中心分裂では DLA モデルで構築したかのような樹枝状のパターンが特徴的であることが分かる。一様分裂の場合にはすべてのノードが等しく分裂する確率を持つ影響により等方的な円形にノード集合が成長する一方，中心分裂では中心からのみ分裂し押し出されるため等方的にならず，複雑な形状を残したまま成長した結果樹枝状になると考えられる。また，μ が小さいとき，高次数ノードの分布については正方格子と六角格子の一様分裂と同様に，MED-rand では赤ノードと白ノードの増加が確認される。一方，μ が大きいとき，高次数ノードが中心ではなく，樹枝状の先端部分に集中しやすい。

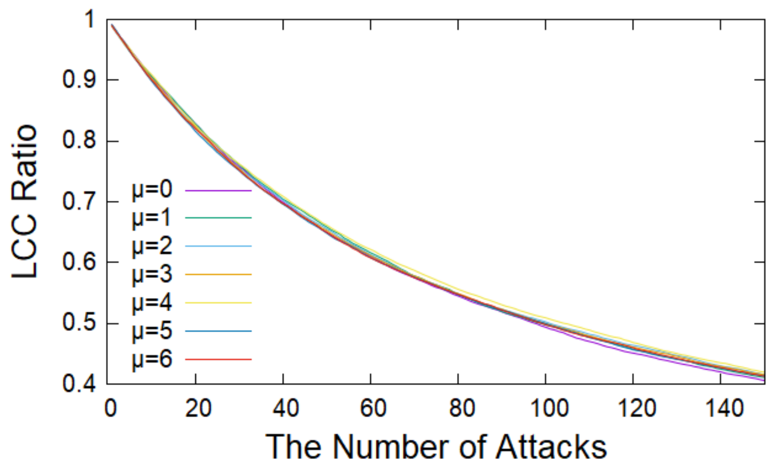
4.5 空間的な攻撃-地震

地震をモデルとした空間的な攻撃では，30 年間で最大連結成分比がどれだけ小さくなるかを調べ，1 年間で 5 回の地震が発生するとしたため，30 年間で 150 回の攻撃を行っている。

地震をモデル化した空間的な攻撃の結果を以下に示す。



(a) MED-kmin

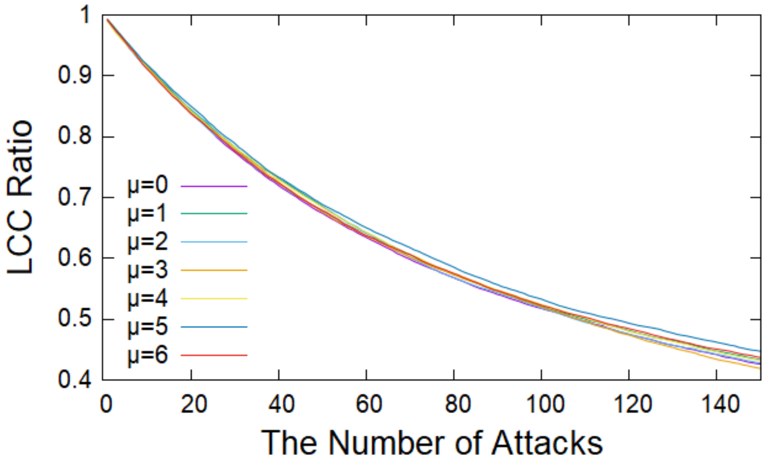


(b) MED-rand

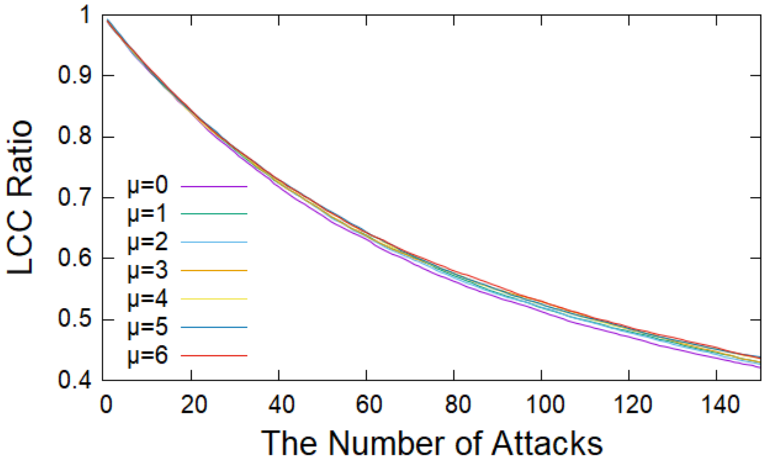
図 4.8: 正方格子における空間的な攻撃による最大連結成分比の変化

図 4.8 から，正方格子の場合，空間的な攻撃への耐性に MED の手法や仲介数の大きさはあまり関係しないと言える。また，攻撃を重ねるごとに，除去できるノード数が減少しているのがグラフから明らかである。現実であれば 30 年もあればネットワークシステムのノードが修復されるが，今回はノードの回復を考慮していないため，攻撃を重ねるごとに，ネットワークに存在するノード数が減少した結果として生じた傾向であると考えられる。

次に六角格子の場合の空間的な攻撃への耐性を以下に示す。



(a) MED-kmin



(b) MED-rand

図 4.9: 六角格子，一様分裂における空間的な攻撃による最大連結成分比の変化

図 4.9 から，MED の種類や仲介数の大きさによってあまり最大連結成分比が変動しない点や, 後の方の攻撃で除去されるノード数が減少する傾向は図 4.8 で確認した正方格子の場合とほとんど同じである。

一方，図 4.8 と図 4.9 において正方格子と六角格子の間で 150 回目の攻撃時の最大連結成分比を比較すると，わずかながら六角格子の方が全体的に高いことがわかる。これは，前節で指摘した六角格子にみられる枝分かれや隙間の多さが要因の一つであると考えられる。

第5章 おわりに

本論文では，生物学における細胞分裂に着想を得たノード配置と仲介に基づく逐次成長法を用いて，空間上にノードを埋め込んだ玉葱状ネットワーク構築方法を提案した。提案手法により，玉葱状ネットワークの創発と，高次数ノードの分散化を検討し，以下の結果を得た。

- 提案手法で構築したネットワークは，一様ランダムに選択されたノードが分裂する条件で次数順攻撃に対する頑健性と次数相関が高く，玉葱状ネットワークを創発する。

- 提案手法で構築したネットワークは，高次数ノードの空間的な分散化を可能にする。

また，実際の災害により近い被害に対するネットワークの頑健性測定を想定し，断層地震をモデルとした一定範囲に存在する複数のノードを除去する空間的な攻撃モデルを提案した。本論文での提案手法で構築したネットワークに対して攻撃を行うことで，以下の結果を得た。

- 提案手法で構築したネットワークにおいて，次数順攻撃に対する結合耐性の違いは，空間的な攻撃に対する最大連結成分に大きな影響を与えない。

今後の研究として，本論文で提案した空間的な攻撃モデルを用いて，空間上にノードを埋め込んだネットワークについて，空間的な攻撃への耐性の検討が可能になる。また，本論文で提案したネットワーク構築モデルは設置されたノードが動く設定となっているが，電力網，通信網などの現実のネットワークでは設置されたノードを動かすことは難しい。そのため，提案モデルの設定と現実のネットワークの制限との差異を埋める方法を検討する必要がある。

謝辞

本研究にあたって，指導教官の林幸雄教授から様々なご指導を賜りましたことに深く感謝申し上げます。また，副指導教官として本研究についてご助言を賜りました金沢大学の坂本二郎教授に心より感謝いたします。最後に，多くのサポートをいただいた研究室のメンバーの皆様にも感謝申し上げます。

参考文献

[1]]Barabási, A.-L. & Albert, R. Emergence of Scaling in Random Networks, Science 286, 509–512, 1999.

[2] Albert, R., Jeong, H., & Barabási, A.-L. Error and attack tolerance of complex networks, Nature, 406, 378–382, 2000.

[3] Schneider, C. M., Moreira, A. A., Andrade Jr., J. S., Havlin, S., & Herrmann, H. J. Mitigation of malicious attacks on networks, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 108, 3838–3841, 2011.

[4] Tanizawa, T., Havlin, S. & Stanley, H.E. Robustness of onion-like correlated networks against targeted attacks, Physical Review E, Vol. 85, pp.046109, 2012.

[5] Wu, Z,-X. & Holme, P. Onion structure and network robustness, Physical Review E, Vol.84, 026106, 2011.

[6] Sampaio Filho, C., Moreira, A., Andrade, R. et al. Mandala Networks: ultra-small-world and highly sparse graphs. Scientific Report 5, 9082, 2015. https://doi.org/10.1038/srep09082

[7] Hayashi, Y. Growing Self-organized Design of Efficient and Robust Complex Networks, Proceedings of 2014 IEEE 8th International Conference on SASO, pp.50-59, doi:101109/SASO2014.17(2014).

[8] Hayashi, Y. A new design principle of robust onion-like networks self-organized in growth, Network Science, Vol. 6, No. 1, pp.54-70, (2018).

[9] Hayashi, Y., Uchiyama, N. Onion-like networks are both robust and resilient. Scientific Report 8, 11241, 2018. https://doi.org/10.1038/s41598-018-29626-w

[10] Hayashi, Y. & Tanaka, Y. Emergence of an Onion-like Network in Surface Growth and Its Strong Robustness, IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol.E102-A, No.10, pp.1393-1396, 2019.

[11] 田中　裕己，表面成長による玉葱構造の創発の可能性について，北陸先端

科学技術大学院大学，修士論文, 2019.

[12] Vassallo, L., Hansmann, D. & Braunstein, L.A. On the growth of non-motile bacteria colonies: an agent-based model for pattern formation, Eur. Phys. J. B 92, 216, 2019.

[13] Newman, M. E. J., Assortative mixing in networks, Physical Review Letter, 89, 208701, 2002.

[14] Nishiguchi, T. & Beaudet, A. Case study the Toyota group and the Aisin fire. Sloan Management Review, 40(1), 49–59, 1998.

[15] Eden, M. A two-dimensional growth process, in: J. Neyman (Ed.), Proceedings of the 4tn Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. IV of IV, pp.223-239, 1961.

[16] Wilkinson, D. & Willemsen, J.F. Invasion percolation: a new form of percolation theory, Journal of Physics A: Mathematical and General, Vol. 16, pp.3365-3376, 1983.

[17] Witten, T.A. & Sander, L.M. Diffusion-limited aggregation, Physical Review B, Vol. 27, No. 9, pp.36-44, 1983.

[18] 朝田　康夫, 美容の医学　美容皮膚科学辞典　最新改訂版, 中央書院, 2002.

[19] Gutenberg, B. & C. F. Richter, Frequency of earthquakes in California, Bull. Seism. Soc. Am., 34, pp.185-188, 1944.

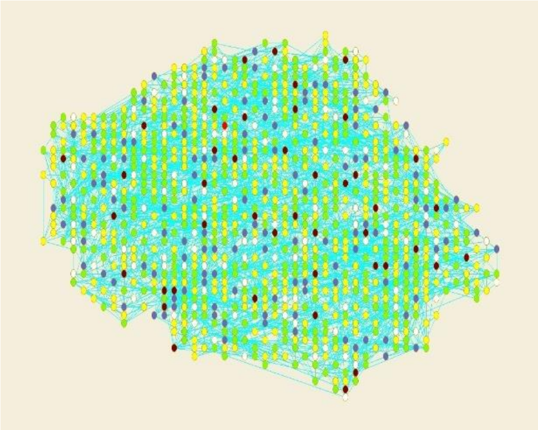
[20] 弘瀬　冬樹・前田　健司，本震前に現れる G-R 則からの逸脱とその特徴に基づいた地震予測モデルの提案，地震，Vol.70, pp.21-41, 2017.

[21] 近江　崇宏, 本震直後からの余震活動のリアルタイム短期予測と中期予測, 統計数理，Vol.63, 1, pp.65-81，2015.

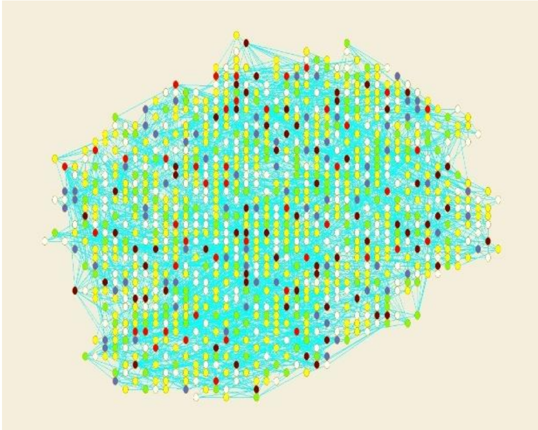
[22] 松田　時彦，最大地震規模による日本列島の地震分帯図，地震研究所彙報, Vol. 65, pp.289-319, 1990.

付録

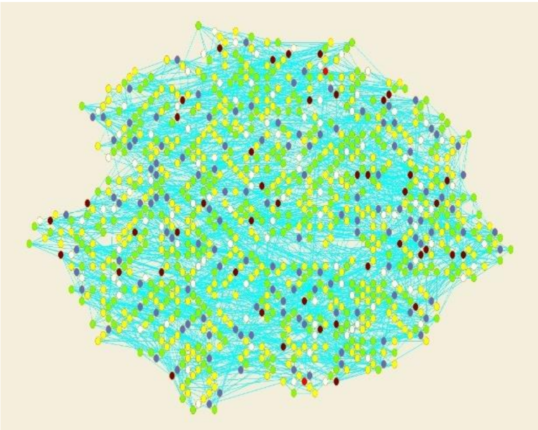
本文で記載しなかった，提案手法(p13)における正方格子の一様分裂，六角格子の一様分裂，六角格子の中心分裂の各条件で構築したネットワーク図(N=1000)を載せる。ノードの色は次数を表しており，白が 4，黄が 5~7，緑が 8~10，灰が 11~13，茶が 14~19，赤が 20 以上とする。またリンクは水色とする。



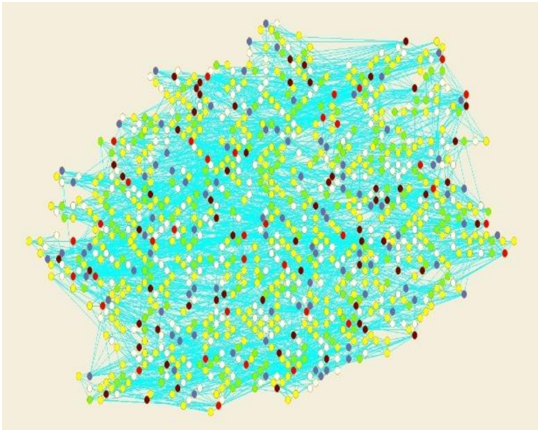
(a) 正方格子, MED-kmin



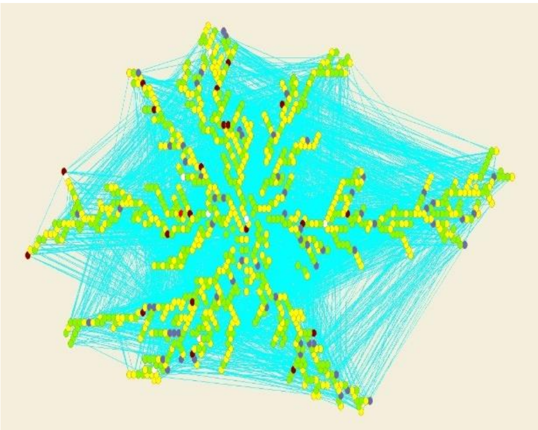
(b) 正方格子, MED-rand



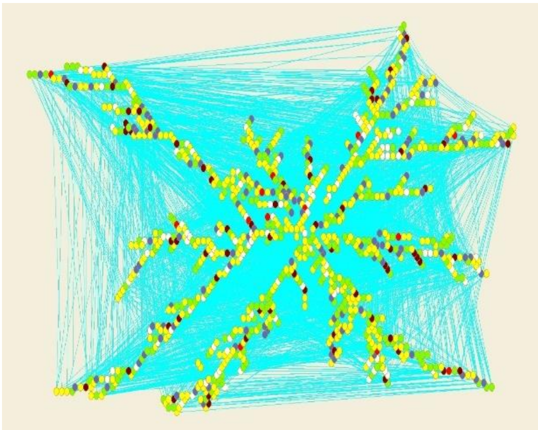
(c) 六角格子, 一様分裂, MED-kmin



(d) 六角格子, 一様分裂, MED-rand

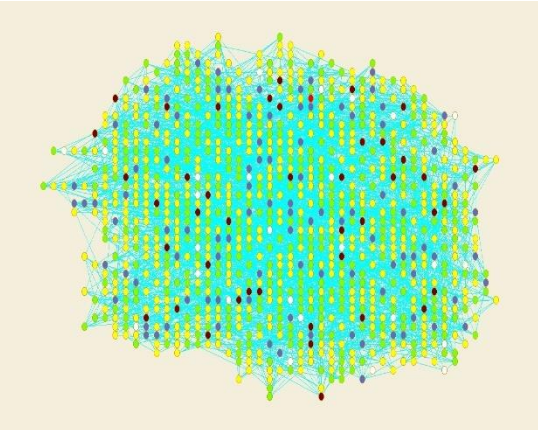


(e) 六角格子, 中心分裂, MED-kmin

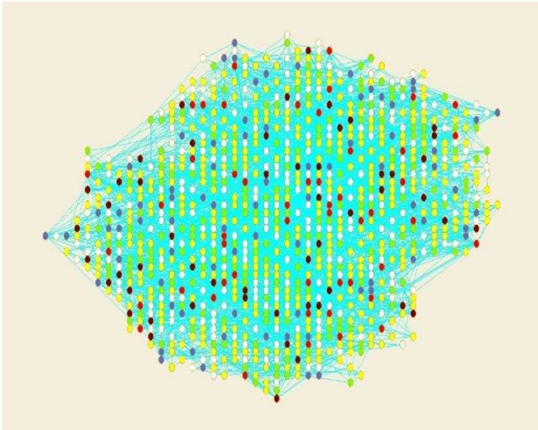


(f) 六角格子, 中心分裂, MED-rand

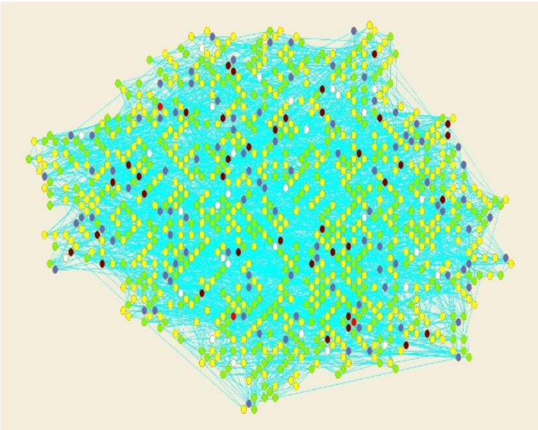
図 A.1： μ=0 のネットワーク図(N=1000)



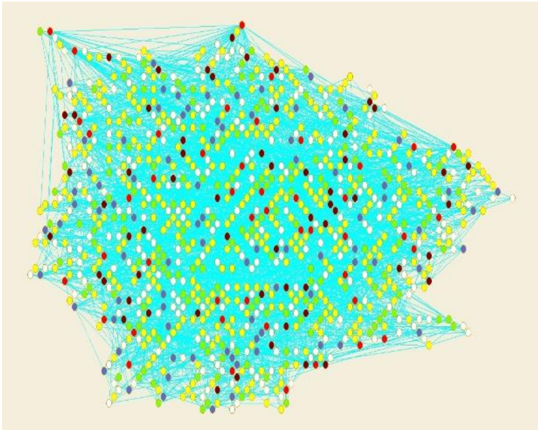
(a) 正方格子, MED-kmin



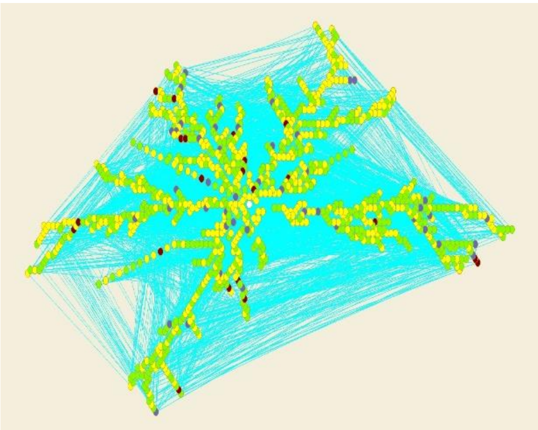
(b) 正方格子, MED-rand



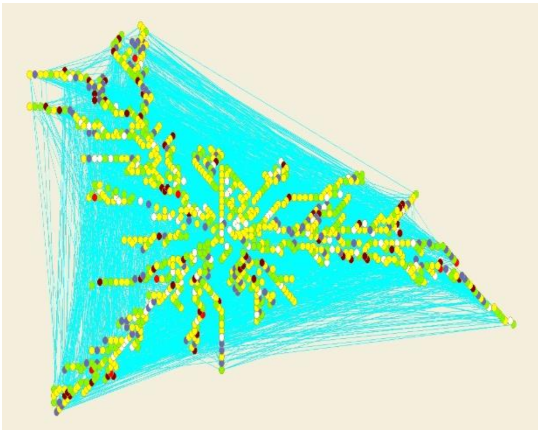
(c) 六角格子，一様分裂, MED-kmin



(d) 六角格子，一様分裂, MED-rand

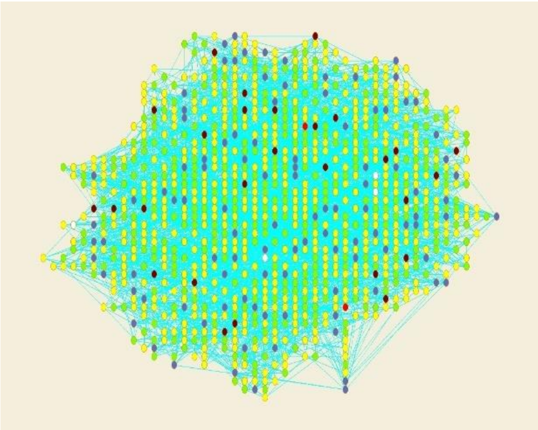


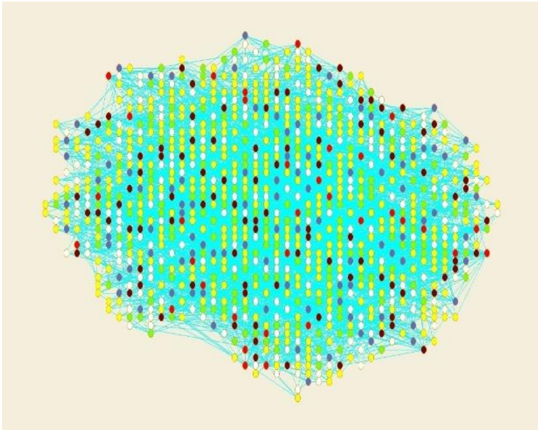
(e) 六角格子，中心分裂, MED-kmin

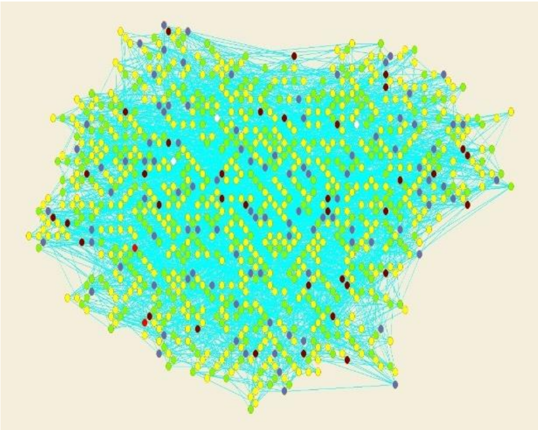


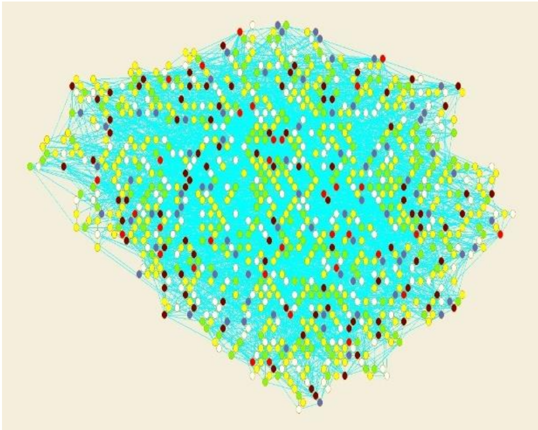
(f) 六角格子，中心分裂, MED-rand

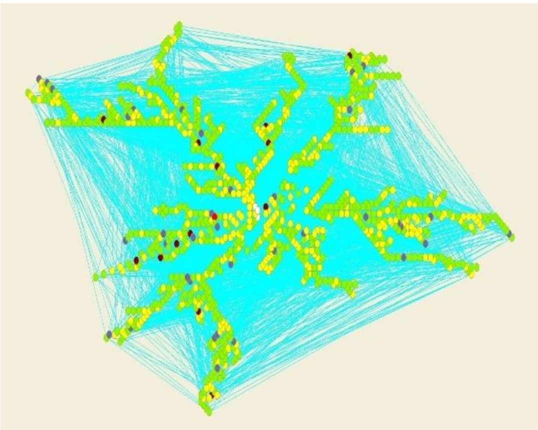
図 A.2： μ=1 のネットワーク図(N=1000)


(a) 正方格子, MED-kmin


(b) 正方格子, MED-rand


(c) 六角格子，一様分裂, MED-kmin


(d) 六角格子，一様分裂, MED-rand


(e) 六角格子，中心分裂, MED-kmin

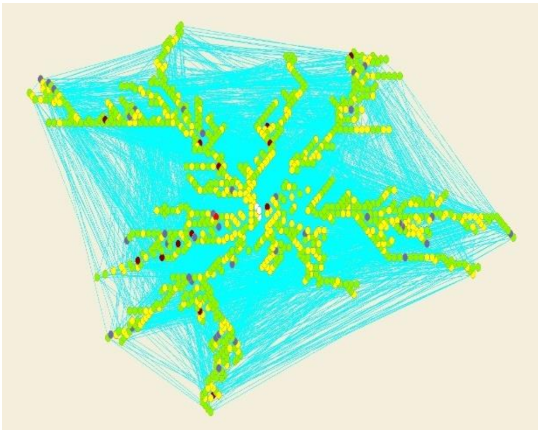
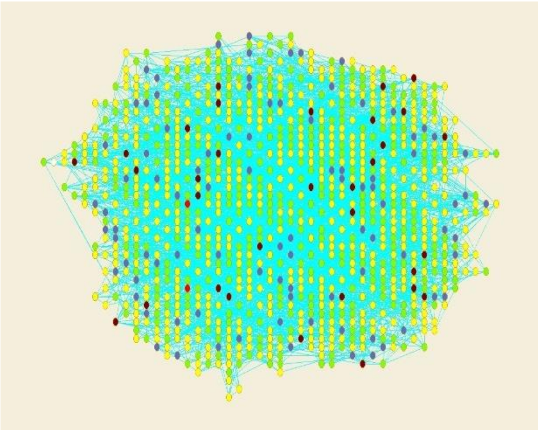
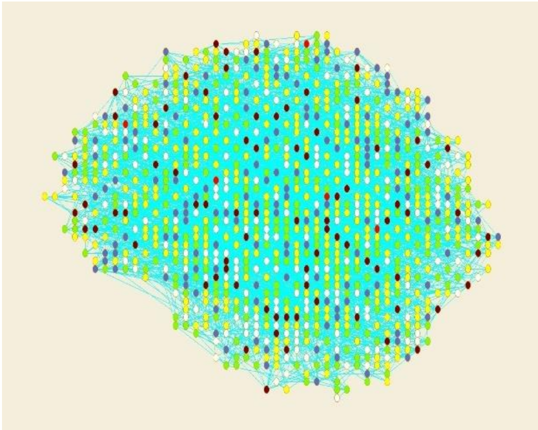

(f) 六角格子，中心分裂, MED-rand

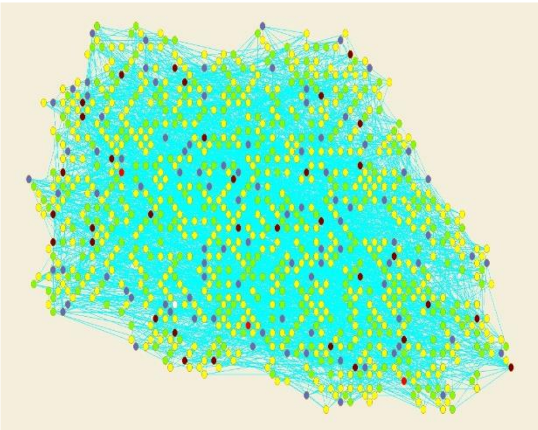
図 A.3： μ=2 のネットワーク図(N=1000)



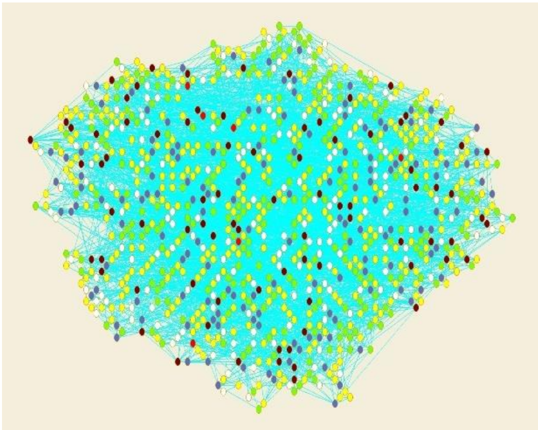
(a) 正方格子, MED-kmin



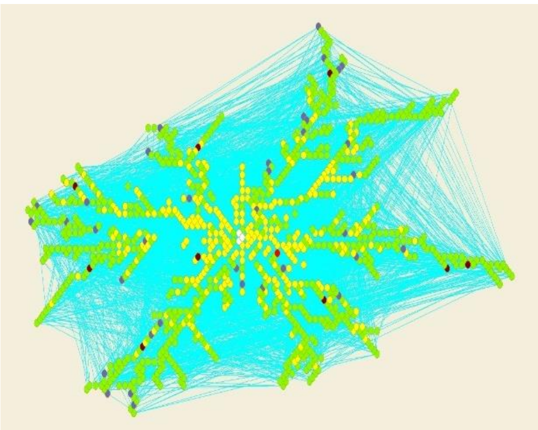
(b) 正方格子, MED-rand



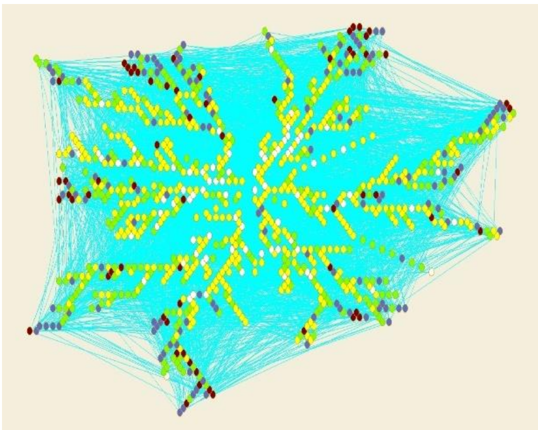
(c) 六角格子，一様分裂, MED-kmin



(d) 六角格子，一様分裂, MED-rand

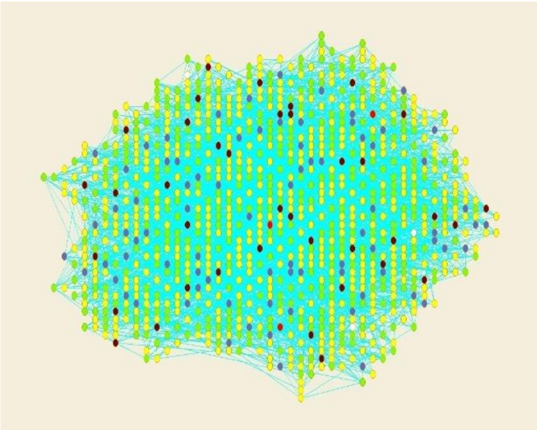


(e) 六角格子，中心分裂, MED-kmin

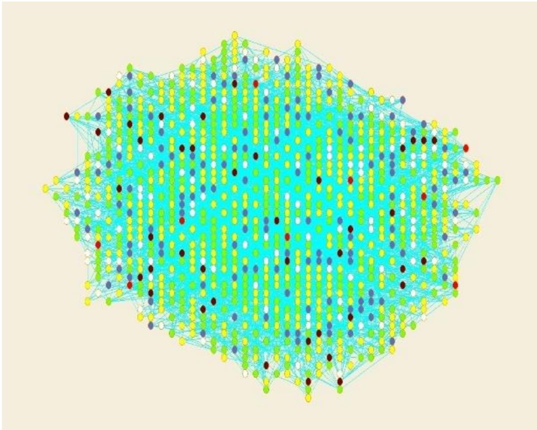


(f) 六角格子，中心分裂, MED-rand

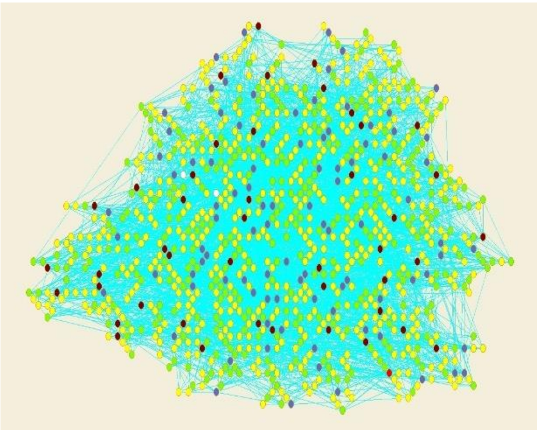
図 A.4： μ=3 のネットワーク図(N=1000)



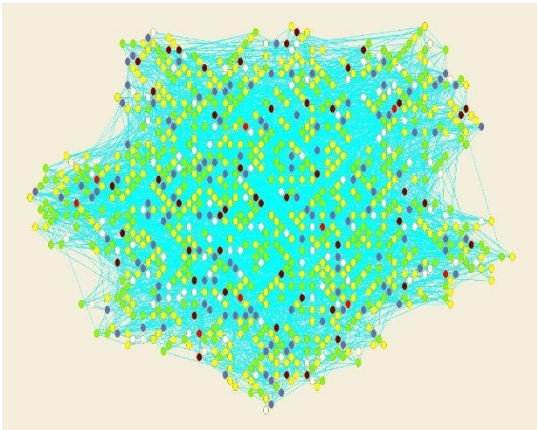
(a) 正方格子, MED-kmin



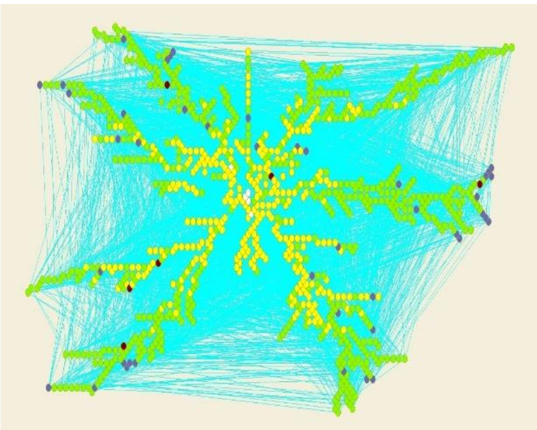
(b) 正方格子, MED-rand



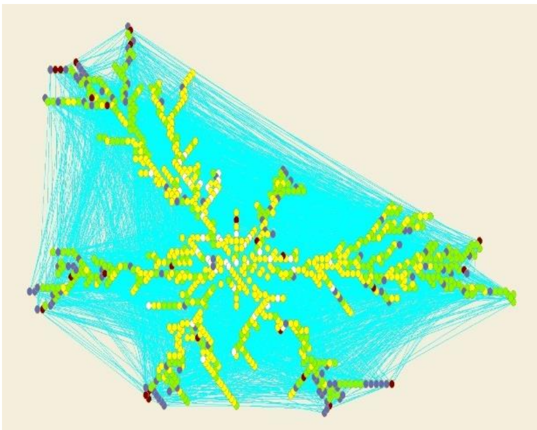
(c) 六角格子，一様分裂, MED-kmin



(d) 六角格子，一様分裂, MED-rand

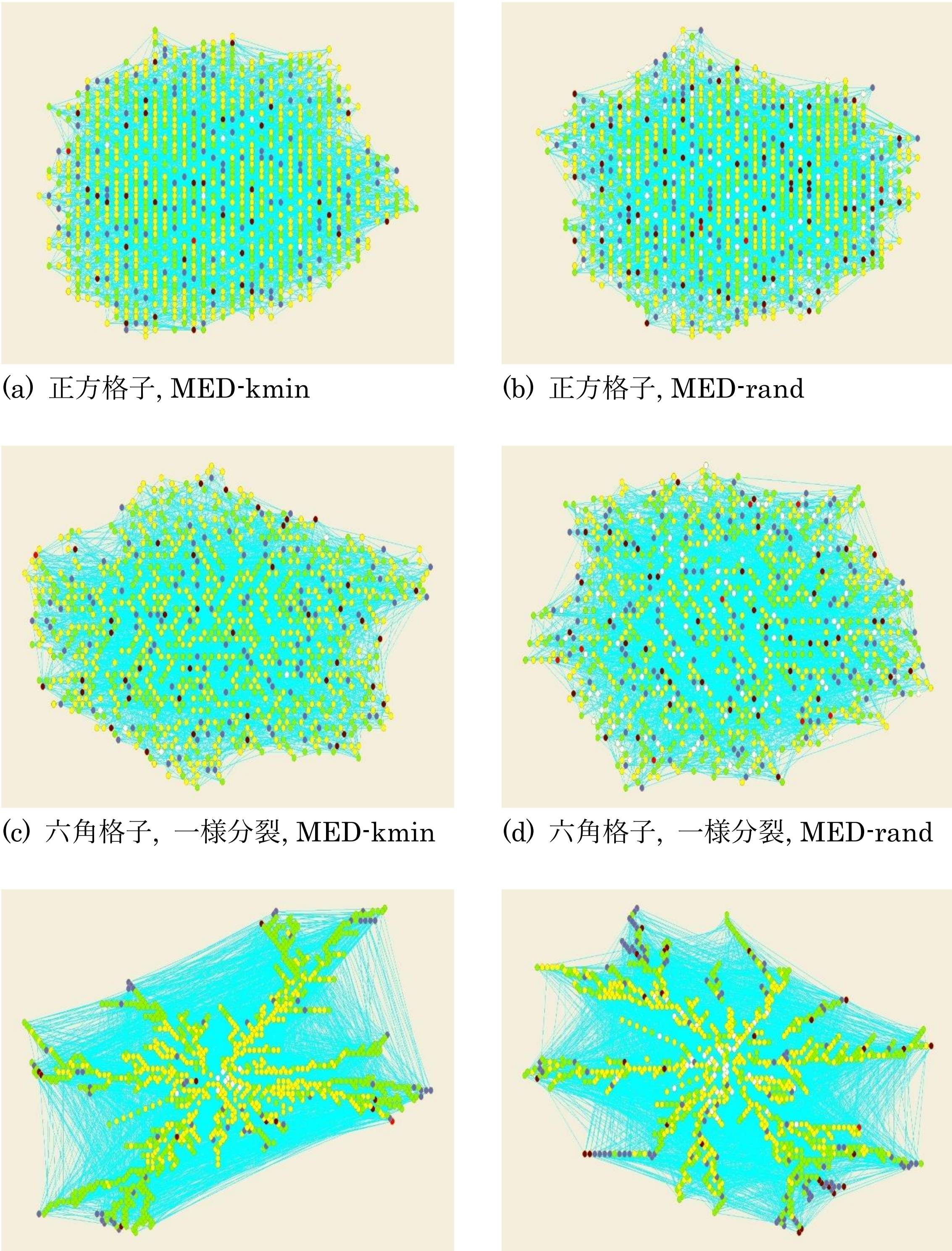


(e) 六角格子，中心分裂, MED-kmin



(f) 六角格子，中心分裂, MED-rand

図 A.5： μ=4 のネットワーク図(N=1000)

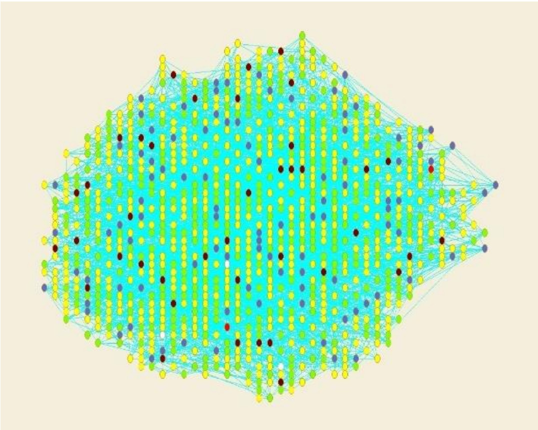


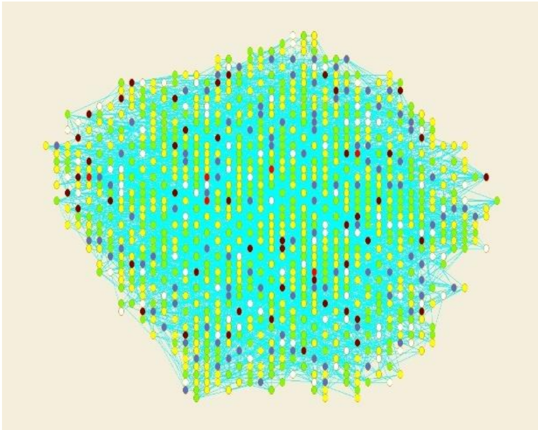
(a) 正方格子, MED-kmin　(b) 正方格子, MED-rand

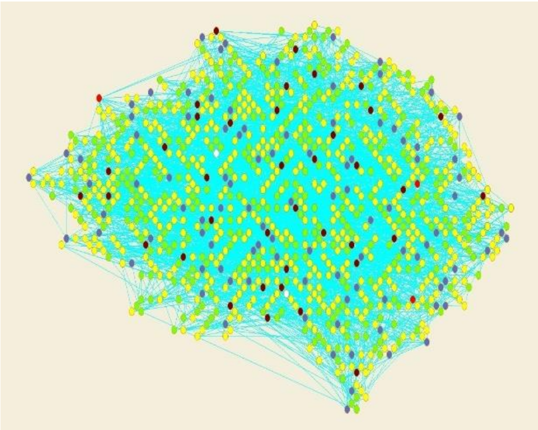
(c) 六角格子，一様分裂, MED-kmin　(d) 六角格子，一様分裂, MED-rand

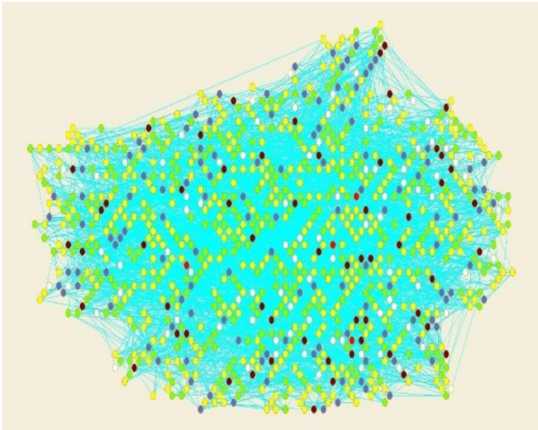
(e) 六角格子，中心分裂, MED-kmin　(f) 六角格子，中心分裂, MED-rand

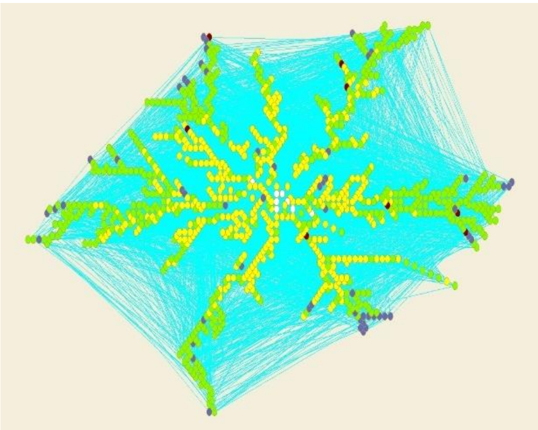
図 A.6： μ=5 のネットワーク図(N=1000)


(a) 正方格子, MED-kmin


(b) 正方格子, MED-rand


(c) 六角格子，一様分裂, MED-kmin


(d) 六角格子，一様分裂, MED-rand


(e) 六角格子，中心分裂, MED-kmin

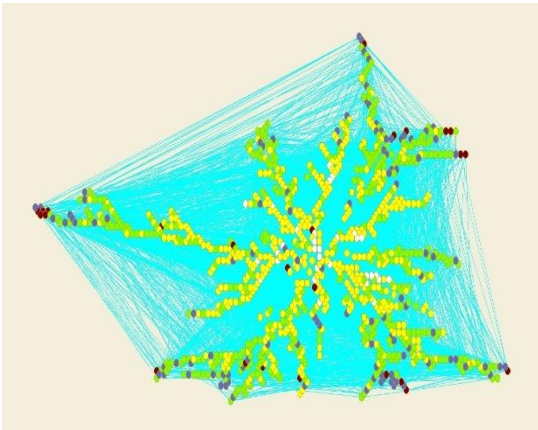

(f) 六角格子，中心分裂, MED-rand

図 A.7： μ=6 のネットワーク図(N=1000)