

災害や攻撃に対する最適な結合耐性

林 幸雄

北陸先端科学技術大学院大学

初版 2022

1. 世界初 玉葱状構造の逐次成長法

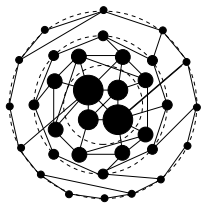
$P(k)$ 不変では攻撃に最適な結合耐性 = 正次数相関を持つ玉葱状構造

C.M.Shneider et al., PNAS 810, 2011,

T.Tanizawa, S.Havlin, and H.E.Stanley, PRE

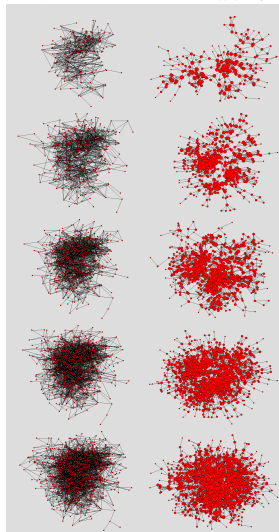
85, 046109, 2012.

⇒ リンク全体張り替えのみ Z.-X.Wu,
and P.Holme, PRE 84, 026116, 2011.



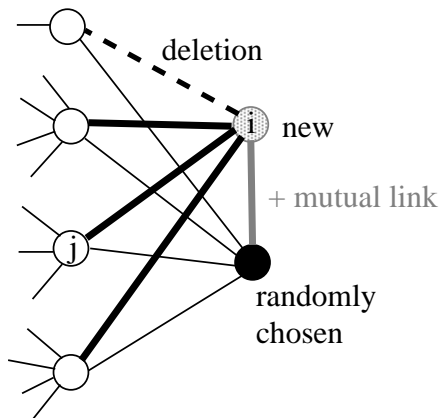
R 値の最大化をスワップで探索しても局所最適で、膨大な計算量

成長しながら構築!



逐次成長法 : Y.Hayashi, IEEE Xplore Digital Library SASO 2014.

1-1 協調的な部分コピー操作に基づく逐次成長法

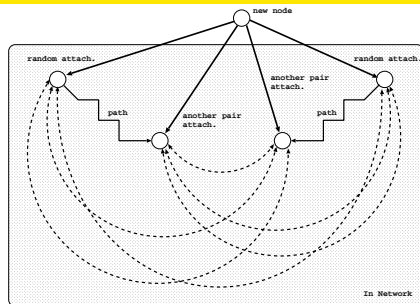


局所代替機能 部分コピー操作で、新ノードは選択されたノードの中継機能を代替するアクセス点となり、経路を局部的にバイパス化

相補的な頑健性向上機能 部分コピー操作のみで高次数ノード間の結合相関は強くなり、ショートカット追加で更に低次数ノード間の結合相関を補強して全体強化

Y.Hayashi, Physica A 457, 2016.

1-2 仲介に基づく逐次成長法



RLD-A: 毎時刻に追加される新ノードからの m 本のリンクを $m/2$ 個のペアとして、片方をランダム選択して結合、もう片方はランダム選択ノードから最遠のノードに結合

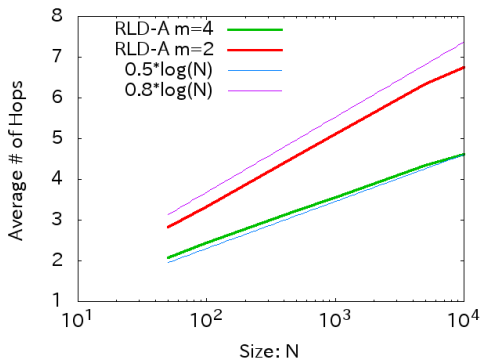
MED: 上記の最遠ノードの代わりに**範囲限定**して、 μ 仲介した $\mu + 1$ ホップ先のノードに結合

▶ 組織論における遠距離交際の重要性 ⇒ **長いループの形成がより本質的**

Y.Hayashi, Network Science 6(1), 2018.

1-3 利己主義を捨てるべき!!

Small-World 効果：ホップ数で計った最短経路の平均経路長は $O(\log N)$

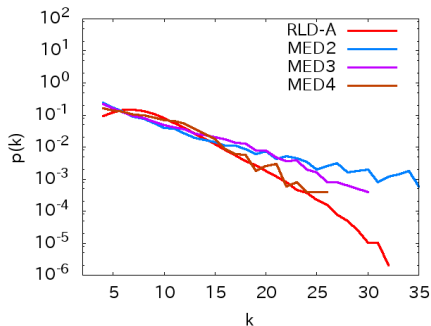
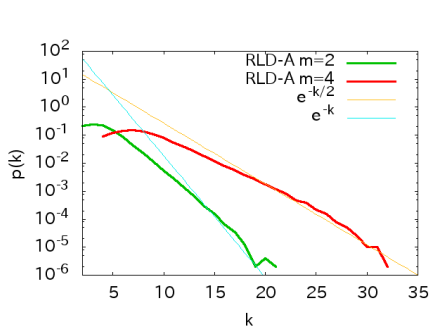


仲介に基づき、頑健性のみならず情報伝達 or 通信の効率も良く両立可
一方、利己主義：優先的選択に基づく現実の多くの Scale-Free ネット
ワークは効率重視で結合耐性は極端に脆い

⇒ 仲介による繋がりに改めれば効率を落とさず脆弱性を克服!

1-4 ハブ無の指数的な裾野を持つ次数分布 $p(k)$

仲介に基づく逐次成長, $N = 5000$ の例



Y.Hayashi, Network Science 6(1), 2018.

⇒ 従来の反省点として, Poisson 分布の Erdős-Rényi ランダムグラフとべき乗分布の Scale-Free ネットの研究に世界的にピンポイント集中して, 次数分布の変化をほぼ検討してこなかった! 但し, 分布は無数に存在!!

2. 木構造になりにくい ループ強化が要

Decycling グラフ G の decycling 数 $\theta_{dec}(G)$ は **ループ無グラフにする** 為に除去するノードの最小比

Dismantling(剥ぎ取る, 裸にする) グラフ G の dismantling 数 $\theta_{dis}(G)$ は **GCのサイズが定数 C より小さくなる** 為に除去するノードの最小比

次数分布 $\{p_k\}$ のランダム疎グラフにおいて

$$\theta_{dec}(p_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} E[\theta_{dec}(G)], \quad \theta_{dis}(p_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{C \rightarrow \infty} E[\theta_{dis}(G, C)].$$

- 任意の次数分布で $\theta_{dis}(p_k) \leq \theta_{dec}(p_k)$
- $\langle k^2 \rangle < \infty$ なら, $\theta_{dis}(p_k) = \theta_{dec}(p_k)$.

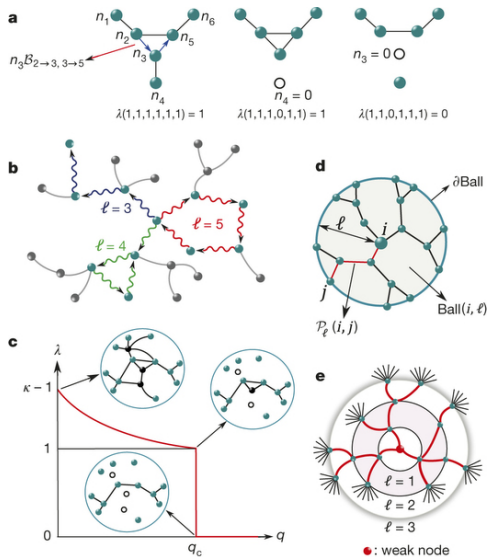
⇒ NP 困難な Decycling 問題と Dismantling 問題は漸近的に等価

A. Braunstein et al., PNAS 113(44), 12368-12373, 2016.

2-1 NN 学習で組合せ最適化の近似解を得る試み

- Graph Convolutional Network (GCN) で Dismantling 集合を推定
各ノードの中心性など複数 p 個の特徴量を付与した $p \times N$ 次元の入力ベクトルを考え, 25 ノードの小規模の部分グラフにおいて攻撃の標的を選べるように事前学習した畳み込みフィルタを用いる
M.Grassia et al., Nature Communications 12(5190), 2021.
- Graph Neural Network (GNN) の強化学習で, 最小 VC 問題, 最小カット問題, 巡回セールスマン問題を近似的に解く
グラフカーネルとして反復伝搬の集約・結合 (aggregate 関数と combine 関数) と反復最後の読み出し (readout 関数) を用いた structure2vec グラフ埋め込みで特徴ベクトルに変換させた後, そのベクトルを入力としてランダム初期値の結合重み等のパラメータを学習
H.Dai et al., Proc. of the 31st Int. Conf. on NIPS, 2017.

2-2 CI: Collective Influence



F. Morone, and H.A. Makse, Nature 524, 65-68, 2015.

2-3 種々のノード攻撃

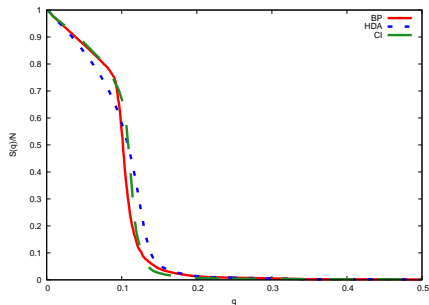
上から下にいくほど破壊力が増す

標的	基本	亜種
一様	ランダム	
中心	媒介中心性など	
ハブ	次数順	知人の免疫化
拡散の要	CI_l	CI_p $CI-TM_L$
結合の核	CoreHD 2-core	k-core
ループ	BP	BPD

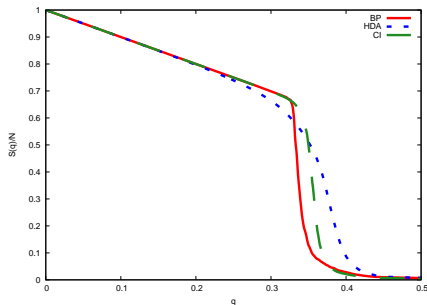
林 編著, Python と複雑ネットワーク分析, 第 4 章, 2019.

2-4 破壊力のある攻撃の比較

ネット生成後にランダム張替えして, 次数分布 $P(k)$ の影響のみ考慮



(a) k^1 -PA SF, べき乗分布

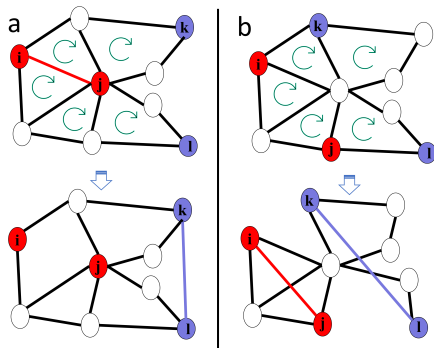


(d) k^{100} -IPA, より狭い分布

実線：HDA 攻撃（再帰的な局所中心の除去），破線：BP 攻撃（ループ破壊），点線：CI₃ 攻撃（インフルエンサー除去）

3. ループ強化に基づくリワイヤリング法

左 a 次数非保存のリワイヤリング, 右 b 次数保存のリワイヤリング



① 次数 k_i や ② ループ強化に関する BP の q_i^0 が最大のノード間のリンク除去, それら最小のノード間にリンク追加, あるいは ③ ΔST が最大のリンク除去と追加を本数分だけ繰り返す.

① ② ③ どの手法も, 頑健性の向上で, 次数分布の幅が狭くなるのは共通!

M.Chujyo, Y.Hayashi, Applied Network Science 6(3), 2021.

3-1 固有値の摂動で近似計算

③ の手法: 行列木定理により, 全域木の数 ST は

$$ST = \frac{1}{N} \prod_{i=2}^N \mu_i,$$

と書き表される (各非木辺に対応する閉路は一次独立な基底をなす). ここで, $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_N$ は Laplacian 行列 $L_a \stackrel{\text{def}}{=} D - A$ の固有値で, 各ノード i の次数 k_i の対角行列 $D \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag}\{k_i\}$ とする.

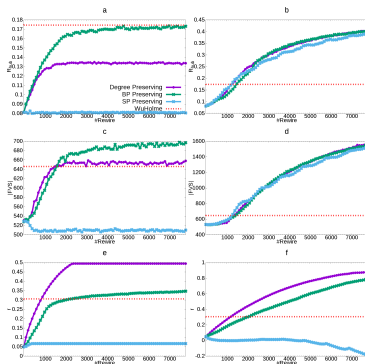
$$\begin{aligned} \Delta ST &= \frac{1}{N} \prod_{h=2}^N (\mu_h \pm \Delta \mu_h) - ST, \\ &\approx ST \times \left(\prod_{h=2}^N \frac{\mu_h \pm (v_{hi} - v_{hj})^2}{\mu_h} - 1 \right). \end{aligned}$$

$O(N^3)$ の固有値の再計算をせずに $O(N)$ で近似的に求められる. v_{hi} は第 h 固有ベクトル \mathbf{v}_h の i 成分を表し, \pm の符号は辺の追加または除去に対応.

H.Chan, L.Akoglu, Data Mining Knowledge Discovery 30, 2016.

3-2 リワイヤリングによる頑健性の向上

① 次数, ② q_i^0 , ③ ST 数に基づく手法を Open Flight の実データに適用
左 次数保存のリワイヤリング, 右 次数非保存のリワイヤリング (効果大)

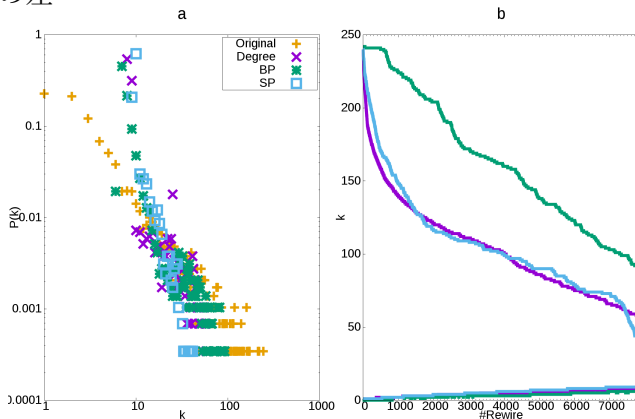


上から下に順に, 頑健性指標 R_{HDA} , $|FVS|$, 次数相関 r
⇒ 負相関でも高い頑健性と大きな $|FVS|$ が存在, ループ強化がより重要!

M.Chujyo, Y.Hayashi, Applied Network Science 6(3), 2021.

3-3 リワイヤリングによる次数分布の変化の共通性

左図 a 非保存の次数分布の比較, 右図 b 張替え本数に対する上線 k_{min} と下線 k_{max} の差

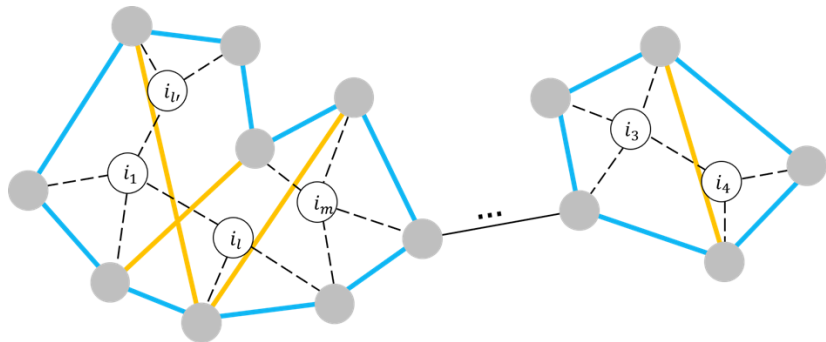


⇒ 負相関の場合を含めて, リワイヤリングで $P(k)$ の幅が狭まる!

M.Chujyo, Y.Hayashi, Applied Network Science 6(3), 2021.

4. ループ強化に基づく自己修復法

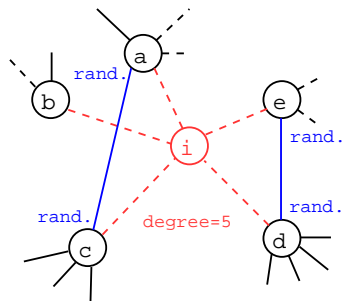
拡張隣接ノード間の輪形成 (穴の周囲補強) + 輪上のループ強化 (BP or 最小次数)



Y.Hayashi, A.Tanaka, J.Matsukubo, Entropy 23(102), Special Issue: Critical Phenomena and Optimization in Complex Networks, 2021.

J.Kim, Y.Hayashi, Frontier in Physics 10(870560), 2022.

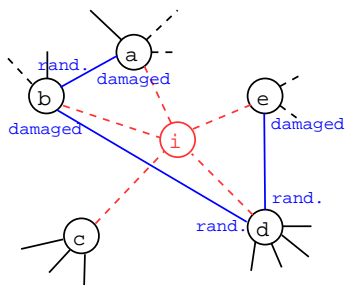
4-1 従来の修復法（隣接ノード間のみ）



reused $5/2 \rightarrow 2$ links

Bypass Rewiring: 攻撃除去ノード i の次数の半分 $\lfloor k_i/2 \rfloor$ だけの本数制約で、一様ランダム選択した隣接ノード間を結合

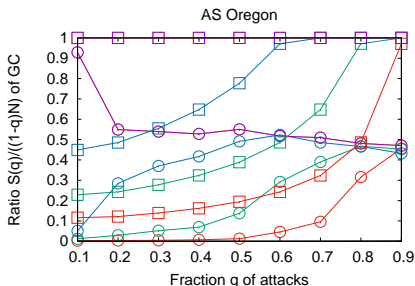
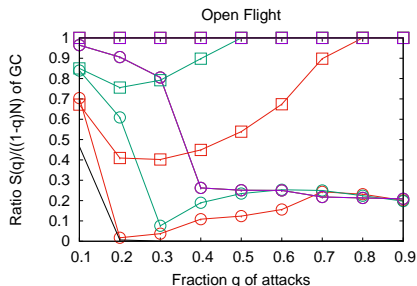
J.Park, S.G.Hahn, Phys. Rev. E 94, 2016.



$5 \times 0.6 = 3$ links

Simple Local Repair: 次数 k_i の割合 f_s の本数だけ、次数減のダメージが大きい $k_{dam}/k_{orig} < \theta$ の昇順選択ノードをランダム選択と結合
L.K.Gallos, N.H.Fefferman, Phys. Rev. E 92, 2015.

4-2 攻撃に対する修復後の連結性



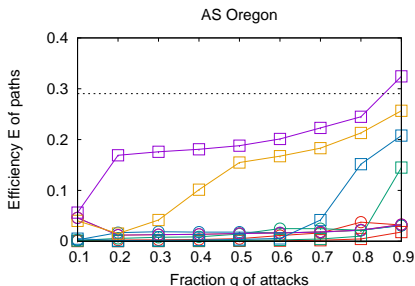
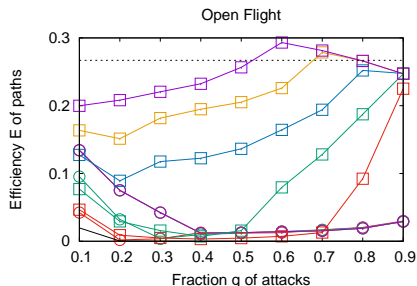
修復リンク率 $r_h = 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0$

□: 提案手法, ○: 従来の SLR 法

⇒ 従来法を凌ぎ, 特に $r_h \geq 0.5$ なら輪を完成して生存ノードを全連結

Y.Hayashi, A.Tanaka, J.Matsukubo, Entropy 23(102), Special Issue: Critical Phenomena and Optimization in Complex Networks, 2021.

4-3 攻撃に対する修復後の通信効率



修復リンク率 $r_h = 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0$

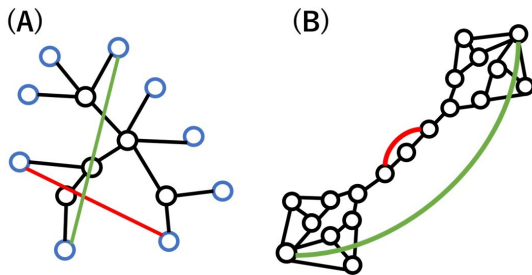
□: 提案手法, ○: 従来の SLR 法

⇒ 従来法を大きく上回り, 点線の攻撃前の元より改善部分も有

Y.Hayashi, A.Tanaka, J.Matsukubo, Entropy 23(102), Special Issue: Critical Phenomena and Optimization in Complex Networks, 2021.

5. 最小次数戦略のリンク追加法

最小次数戦略と最長距離戦略で選択ノードが異なる例



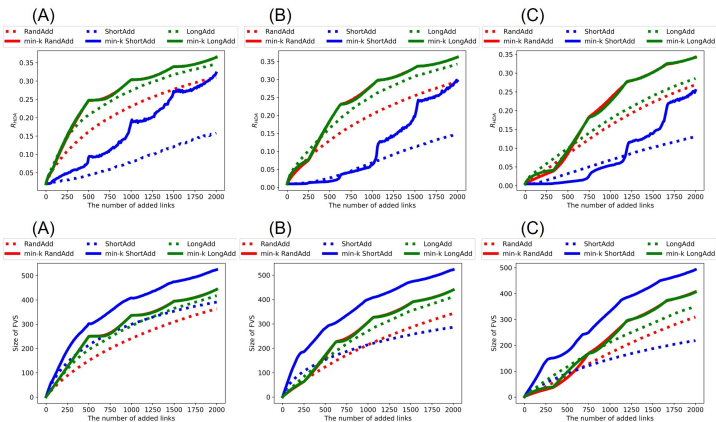
二段階の提案法

	一段	全ノード	最小次数ノード
二段			
一様ランダム		RandAdd	min-k RandAdd
最も長距離		LongAdd	min-k LongAdd
最も短距離		ShortAdd	min-k ShoerAdd

M.Chujyo, Y.Hayashi, PLOS ONE 10(1371), 2022.

5-1 リンク追加による結合耐性の向上

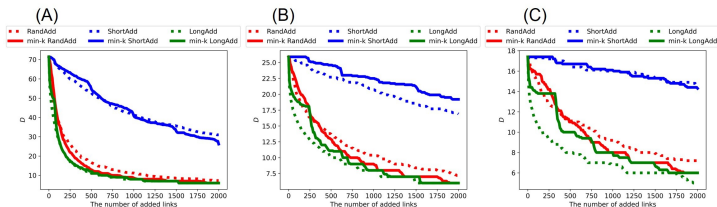
(再計算のない) 次数順攻撃に対する頑健性 (上) と $|FVS|$ (下) の増加, **但し, 最短距離戦略で局所的な多角形を形成すると耐性強化に非貢献**
初期ランダム木の $P(k)$ が (A) より狭い, (B) 指数, (C) べき乗



M.Chujyo, Y.Hayashi, PLOS ONE 10(1371), 2022.

5-2 リンク追加による通信効率の向上

(再計算のない) 次数順攻撃に対する通信効率は、直径 D の減少と連動
初期ランダム木の $P(k)$ が (A) より狭い, (B) 指数, (C) べき乗

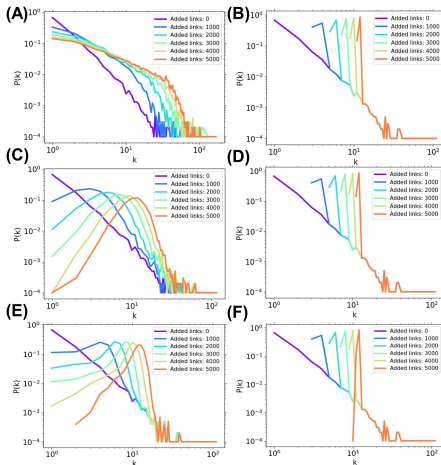


先の頑健性指標 R_{HDA} や $|FVS|$ と同様に直径 D の結果も, $\langle k \rangle \approx 2$ の逆優先的選択で生成したランダム木 ($\beta = 5$) や GN 木 ($\nu = 0, 1$), $\langle k \rangle \approx 4$ の SF ネット (BA モデル) についても同様.

M.Chujyo, Y.Hayashi, PLOS ONE 10(1371), 2022.

5-3 リンク追加による次数分布の変化

(A) ShortAdd, (B) min-k ShortAdd, (C) RandAdd, (D) min-k RandAdd, (E) LongAdd, (F) min-k LongAdd



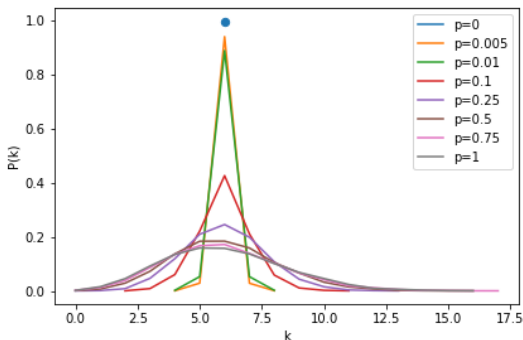
⇒ 頑健性が向上するリンク追加（特に min-k）で共通に、次数分布 $P(k)$ の幅が狭まり分散 $\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k (k - \langle k \rangle)^2 P(k)$ が小さくなる

6. 均一な構造こそ最適な攻撃耐性

d レギュラーからの面的な摂動解析

離散摂動： 二種の次数 d_1, d_2 のみの二峰性ネット, $\Delta d \stackrel{\text{def}}{=} d_2 - d_1 > 0$,
次数分布 $P(k)$ の分散 $\sigma^2 = (d - d_1)\Delta d - (d - d_1)^2$

割合 p のランダム摂動： 多峰な数種類の次数が存在 (下図)



M.Chujyo, Y.Hayashi, T.Hasegawa, arXiv:2301.06291

6-1 二峰性ネットの次数の組合せは網羅的

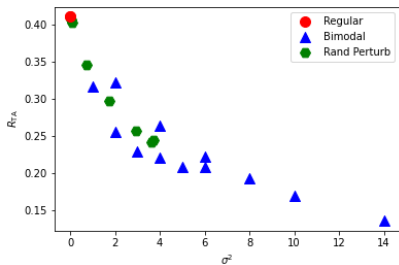
明らかに脆弱な星型を除く: $2 \leq d_1 \leq d-1$, $d+1 \leq d_2 \leq N-2$,
 $\langle k \rangle = d_1 P(d_1) + d_2 P(d_2) = d = 4$ で, 次数の組合せを網羅

Δd	d_1	d_2	σ^2	$P(d_1) = N_1/N$
2	3	5	1	1/2
3	3	6	2	2/3
	2	5	2	1/3
4	3	7	3	3/4
	2	6	4	2/4
5	3	8	4	4/5
	2	7	6	3/5
	\vdots		\vdots	
Δd	$d-1=3$	$\Delta d + d_1$	$\Delta d - 1$	$(\Delta d - 1)/\Delta d$
	$d-2=2$	$\Delta d + d_2$	$2(\Delta d - 2)$	$(\Delta d - 2)/\Delta d$

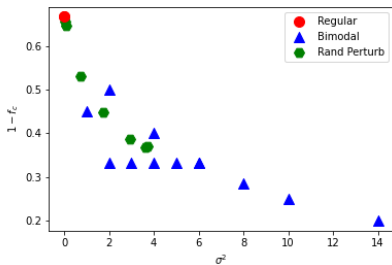
M.Chujyo, Y.Hayashi, T.Hasegawa, arXiv:2301.06291

6-2 悪意のある次数順攻撃に対する耐性

$N = 6300$, $\langle k \rangle = 4$ の場合, 摂動による次数分布 $P(k)$ の分散 σ^2 に対して



(a) 頑健性指標：数値計算



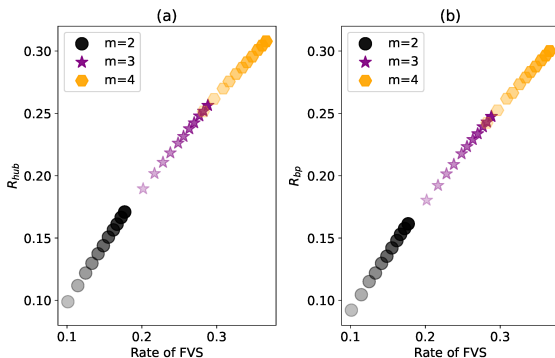
(b) 浸透しきい値：理論解析

⇒ ランダムレギュラーグラフが最も頑健！

M.Chujyo, Y.Hayashi, T.Hasegawa, arXiv:2301.06291

6-3 次数分布の連続変化と頑健性

線的な摂動：濃淡で示すべき乗分布から指数分布の連続変化 (k^ν に比例する結合選択の GN モデル, $N = 10^3$, $\nu = 0, 0.1, \dots, 1$, を Config でランダム化) に対する再帰計算の次数順攻撃とループ破壊への頑健性

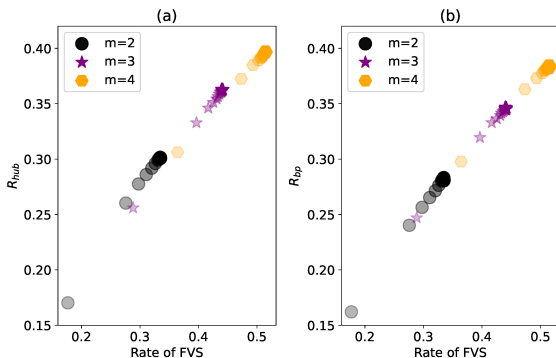


⇒ R 値と $|FVS|$ が連動して、強く相関

M.Chujyo, Y.Hayashi, Proc. of Complex Networks & Their Applications XI, 2022.

次数分布の連続変化と頑健性（続き）

線的な摂動：濃淡で示す 指数分布からより狭い分布の連続変化 ($k^{-\beta}$ に比例する IPA モデル, $N = 10^3$, $\beta = 0, 10, \dots, 200$, を Config でランダム化) に対する再帰計算の次数順攻撃とループ破壊への頑健性



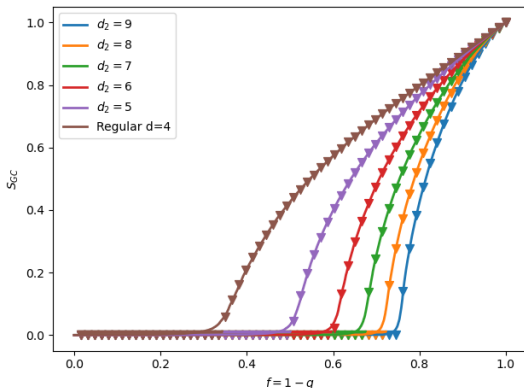
⇒ R 値と $|FVS|$ が連動して、強く相関

M.Chujyo, Y.Hayashi, Proc. of Complex Networks & Their Applications XI, 2022.

6-4 悪意のある次数順攻撃に対する連結性

$N = 6300$, $\langle k \rangle = 4$, $d_1 = 2$ 固定の場合

$\Delta d \stackrel{\text{def}}{=} d_2 - d_1 > 0$ より, 摂動で d_2 を大きくする程, 分散
 $\sigma^2 = (d - d_1)\Delta d - (d - d_1)^2$ も大で, 曲線は右にシフトしている

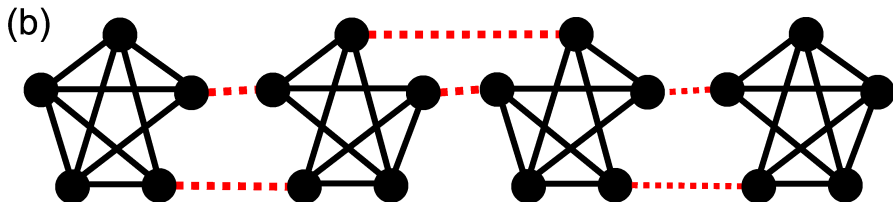
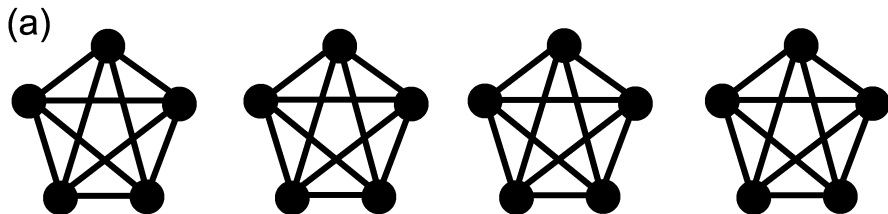


⇒ レギュラーグラフに近い程, 曲線下の面積が大きく, 耐攻撃性が高い!

M.Chujyo, Y.Hayashi, T.Hasegawa, arXiv:2301.06291

レギュラーでも脆弱になり得る例

鎖状のレギュラーグラフ



6-5 不慮のランダム故障に対する耐性

次数分布の分散

$$\begin{aligned}\sigma^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_k (k - \langle k \rangle)^2 P(k) \\ &= \sum_k k^2 P(k) - 2\langle k \rangle \sum_k k P(k) + \langle k \rangle^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2,\end{aligned}$$

から $\langle k^2 \rangle = \sigma^2 + \langle k \rangle^2$ を浸透の臨界値 $p_c = 1/(\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle - 1)$ に代入して

$$p_c = \frac{\langle k \rangle}{\sigma^2 + \langle k \rangle^2 - \langle k \rangle}.$$

⇒ ランダム故障には分散 σ^2 最大の SF ネットが p_c 最小で最適だが、
 $\sigma = 0$ の $d \gtrsim 6$ レギュラーグラフでも崩壊の下限値（浸透の上限値
 $p_c = 1/(d-1)$ ） $q_c = 1 - p_c = \frac{d-2}{d-1} \geq 0.8$ で十分強い！

M.Chujyo, Y.Hayashi, T.Hasegawa, arXiv:2301.06291

6-8 最適耐性のまとめ

- 頑健性の向上には、次数相関よりループ強化がより本質的。
その根拠は、Dismantling \Leftrightarrow Decycling, NB 行列の最大固有値とループ数の関係, ループ破壊の最悪性, 負相関でも頑健な具体例 等々。
- ループ強化に基づく, リワイヤリング (自己修復を含む) やリンク追加において, 次数分布の幅が狭い程, 頑健性が高くなるのが共通。
- 攻撃耐性を上げるには, 次数分布を底上げする, 最小次数ノード結合が有効。従って, 逆優先的選択に着目すべき。
- 次数分布の幅が最小: ゼロのランダムレギュラグラフにて攻撃耐性が最適になることを, 二峰性の網羅的な離散摂動と多峰性のランダム摂動との比較で検証。
- 不慮のランダム故障への耐性は, ($P(k)$ の分散が最大な) SF ネットが最適だが, $\langle k \rangle \gtrsim 6$ なら ($P(k)$ の分散が最小: ゼロで最悪な) ランダムレギュラグラフでも 80%程度まで耐えられ, 実質問題はない。

⇒ 通信効率を落とさず, 頑健性を強固にするには, 利己的な強者への結合から相互扶助的な弱者への結合に移行すべき !!