

逆優先の選択と平等化

林 幸雄

北陸先端科学技術大学院大学

初版 2022

1. 優先的選択の復習

なぜ共通な構造が存在？ → リンク先選択に何か原理があるのでは

- 国内航空網において新規航路を開設する際、全国各地への多くの乗り継ぎ便を持ったハブである羽田空港に乗り入れると便利で自社の利用客が増える。
- 多くの回線が接続する通信拠点に繋ぐ方が少ない経由数で何処にでも辿り着けそう。
- 貧乏人より金持ちと付き合った方が金回りが良い。

ノードを人に、リンクを経済取引から得るお金に対応付ければ、優先的選択は、"金持ちはより金持ちになる (rich get richer)" 法則に読み替えられる。

損得や効率を重視する優先的選択は単なるネットワーク生成モデルの基本的規則に留まらず、ある種の利己原理を個々人が持てば、例え全体への影響を意図しなくても不平等な世界が生じうる！

2. BAモデルを拡張した選択的リンク

一般に、次数 κ の非線形関数 $f(\kappa)$ に比例した確率で選択的に $m = k_{min}$ 本リンクするとき、最低次数 k_{min} のノードの割合は平衡解として、

$$\frac{N_{k_{min}}}{N} = \frac{N_{k_{min}} + 1 - mP(k_{min})f(k_{min})/\langle f \rangle}{N + 1},$$
$$P(k_{min}) = \frac{\langle f \rangle}{\langle f \rangle + m \times f(k_{min})},$$

を得る。同様に、次数 $k > k_{min}$ では、

$$\frac{N_k}{N} = \frac{N_k + mP(k-1)f(k-1)/\langle f \rangle - mP(k)f(k)/\langle f \rangle}{N + 1},$$
$$P(k) = \frac{mf(k-1)}{\langle f \rangle + m \times f(k)} P(k-1),$$

を得るので、次数分布は

$$P(k) = \frac{\langle f \rangle}{\langle f \rangle + m \times f(k_{min})} \prod_{\kappa=k_{min}+1}^k \frac{m \times f(\kappa-1)}{\langle f \rangle + m \times f(\kappa)}. \quad (1)$$

3. 逆優先的選択 (IPA) モデル

式 (1) に $f(\kappa)$ に $\kappa^{-\beta}$ を代入すると,

$$\begin{aligned} P(k) &= \exp \left[\ln \left\{ \frac{\langle f \rangle}{\langle f \rangle + m \times f(k_{min})} \prod_{\kappa=k_{min}+1}^k \frac{m \times f(\kappa-1)}{\langle f \rangle + m \times f(\kappa)} \right\} \right] \\ &= \exp \left[\sum_{\kappa=k_{min}+1}^k \{ \ln(m) + \ln(\kappa-1)^{-\beta} - \ln(\langle f \rangle + m \times \kappa^{-\beta}) \} + C \right], \end{aligned}$$

となる. ここで, $C \stackrel{\text{def}}{=} \ln \left(\frac{\langle f \rangle}{\langle f \rangle + m \times f(k_{min})} \right)$ とする.

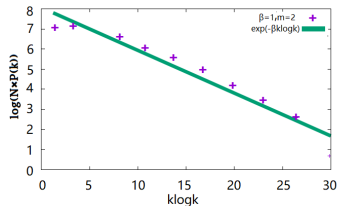
上式において, 定数 C と $\ln(m)$, 及び, $k_{min} + 1 \leq \kappa \leq k$ に対する $\ln(\langle f \rangle + m \times k_{min}^{-\beta}) > \ln(\langle f \rangle + m \times \kappa^{-\beta})$ は無視でき, $k \gg 1$ において,

$$\exp \left[\int_{k_{min}}^{k-1} -\beta \ln(\kappa) d\kappa \right] \sim e^{-\beta k \ln k},$$

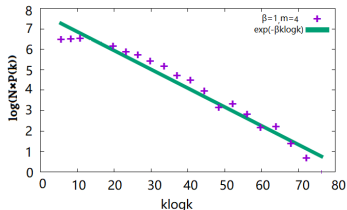
と近似的に推定される. すなわち, 逆優先的選択では, 次数が大きいノードの存在頻度が急激に下がって分布の幅は狭くなる.

F.Liao, Y.Hayahsi, Physica A 599(127427), 2022.

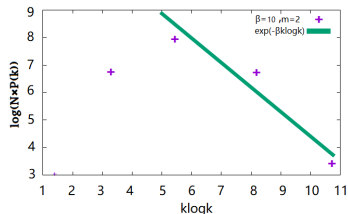
$k^{-\beta}$ -attach. で生成された $P(k)$ の裾野の推定



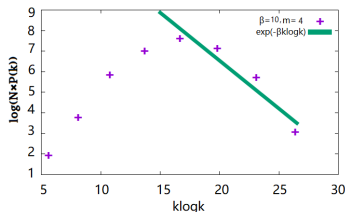
(a) $m = 2, \beta = 1$



(b) $m = 4, \beta = 1$



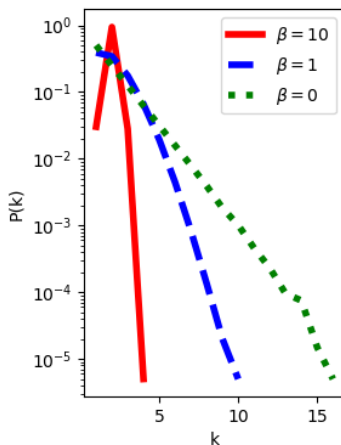
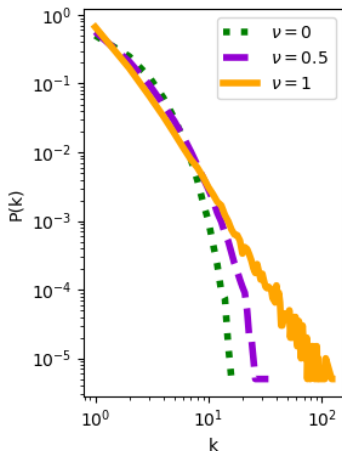
(c) $m = 2, \beta = 10$



(d) $m = 4, \beta = 10$

次数分布の連続変化：べき乗, 指数, ...

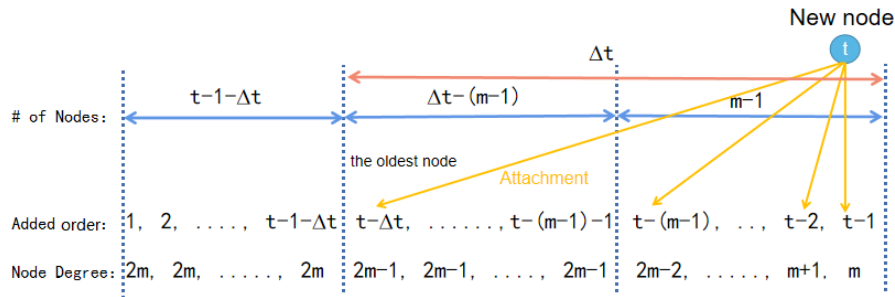
$N = 1000$, $m = 1$ の 100 平均, 左 k^ν -attach., 右 $k^{-\beta}$ -attach.



⇒ 指数分布より, β 大になるほど分布の幅が狭く, 分散が小さくなる

$\beta \rightarrow \infty$ での最小次数選択

時刻 t で挿入された新ノードは時刻 $t-1$ から $t-(m-1)$ に挿入された次数 m から次数 $2m-2$ の 1 個ずつのノードにまず結合する. m 本中の残りの 1 本は, 複数存在する次数 $2m-1$ のノード (のどれか) に結合する. また毎時刻 m 本なので, **次数 $2m$ より大きいノードは存在し得ない.**



上段: 3 区間のノードの個数, 中段: 挿入された時刻 (順番), 下段: そのノードの時刻 t での次数をそれぞれ表す.

F.Liao, Y.Hayahsi, Physica A 599(127427), 2022.

β 大における鎖状構造の創発

時刻 m 本ずつ増えるリンクの両端の次数により,

$$2M(0) + 2mt = 2m(N(0) + t - \Delta t) + (2m - 1)(\Delta t - m) + \sum_{k=m+1}^{2m-2+1} k + m,$$

となる. 上式を Δt について解くと

$$\Delta t = 2mN(0) - 2M(0) - \frac{m(m-1)}{2},$$

となり, 初期完全グラフでは $N(0) = m + 1$ 及び $M(0) = \frac{m(m+1)}{2}$ なので, 上式にこれらを代入すると,

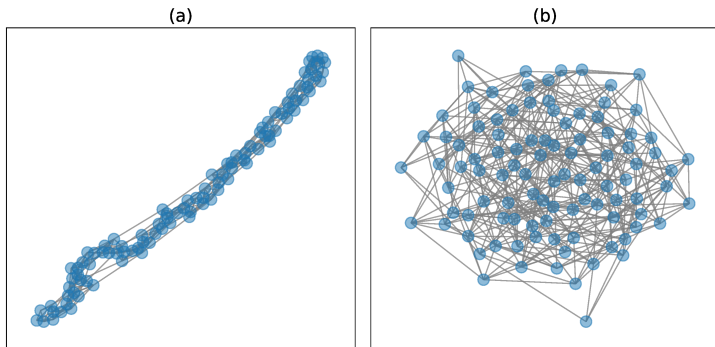
$$\Delta t = \frac{m(m+3)}{2} > m.$$

⇒ ノードは自身より Δt 時間前に挿入されたノードには結合せず, **直径が $N/\Delta t$ 程度の鎖状構造**となる.

F.Liao, Y.Hayahsi, Physica A 599(127427), 2022.

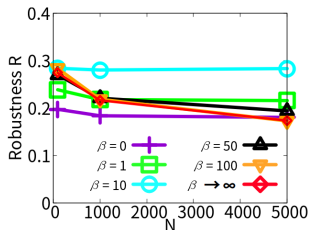
鎖状構造の可視化例

(a) IPA モデル ($N = 200, m = 4, \beta = 200$), (b) Config でランダム化

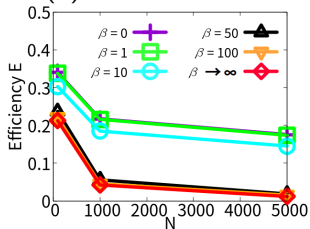


M.Chujyo, Y.Hayahsi, Proc. of Complex Networks & Their Applications XI, 2022.

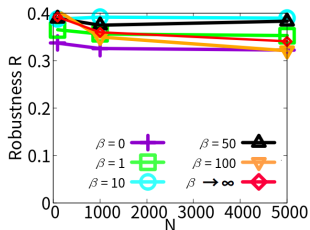
IPA モデルの高い頑健性 (a)(b) と通信効率 (c)(d)



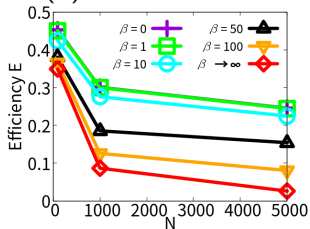
(a) 頑健性, $m = 2$



(c) 通信効率, $m = 2$



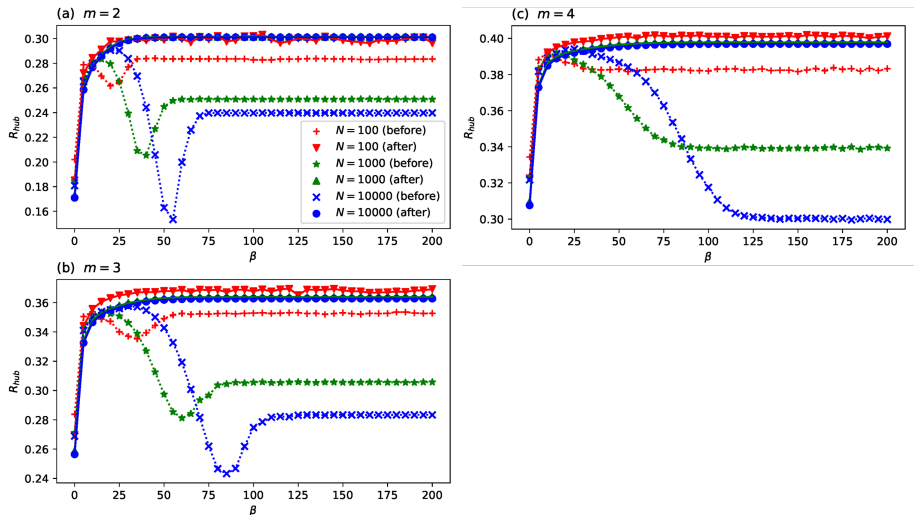
(b) 頑健性, $m = 4$



(d) 通信効率, $m = 4$

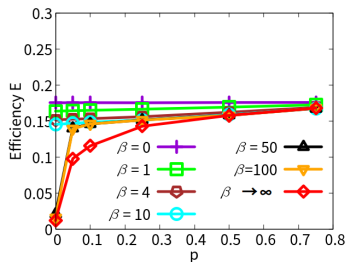
R 値のより詳細な挙動

IPA モデルの Config によるランダム化前後の比較, 鎖状構造の悪影響

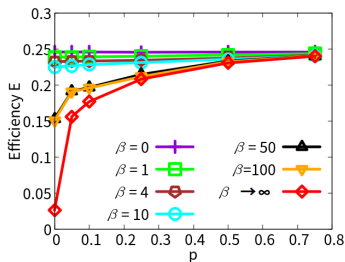


4. 混合モデルの通信効率

割合 p の rand.-attach. と割合 $1 - p$ の $k^{-\beta}$ -attach. の混合



(a) $m = 2$



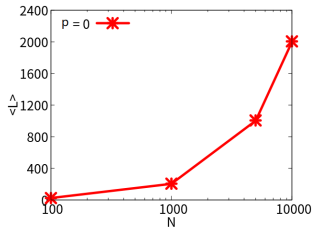
(b) $m = 4$

p が大きいほど、鎖状構造が無くなってノード間距離が縮まり、通信効率 E が向上し、 β が大きい程その変化は顕著。

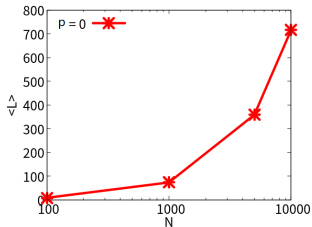
⇒ Watts-Strogatz の SW モデルと同様に、ほんの少し rand.-attach. を混ぜた IPA で大幅に改善！

F.Liao, Y.Hayahsi, Physica A 599(127427), 2022.

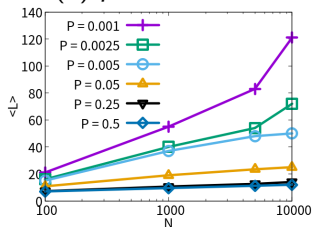
混合モデルのSW性: 平均経路長 $\langle L \rangle$ が $O(\log N)$ か?



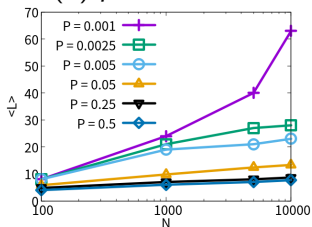
(a) $p = 0, m = 2$



(b) $p = 0, m = 4$



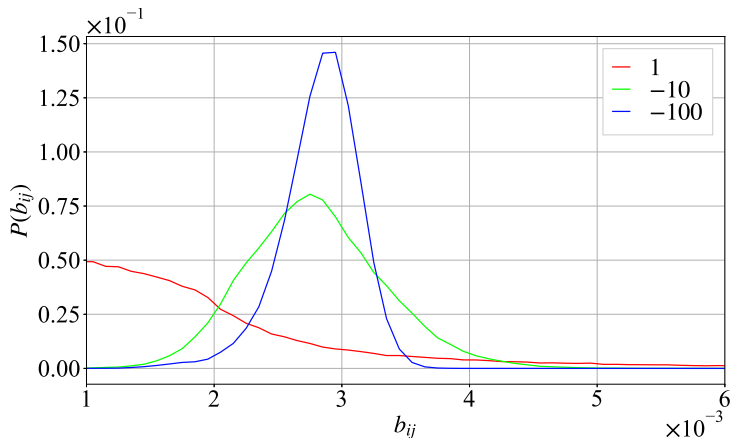
(c) $p > 0, m = 2$



(d) $p > 0, m = 4$

5. 代替経路が多数存在

鎖状の影響を無くす為、Config モデルでランダム化した優先的選択と逆優先的選択 ($\beta = -10, -100$) の次数分布における、リンクの媒介中心性 b_{ij} の頻度分布 $P(b_{ij})$



⇒ 幅の狭い分布で、最短経路が一部に集中してない長所を示す

6. カスケード故障への耐性向上

連鎖的な道路の渋滞や通信における輻輳をモデル化

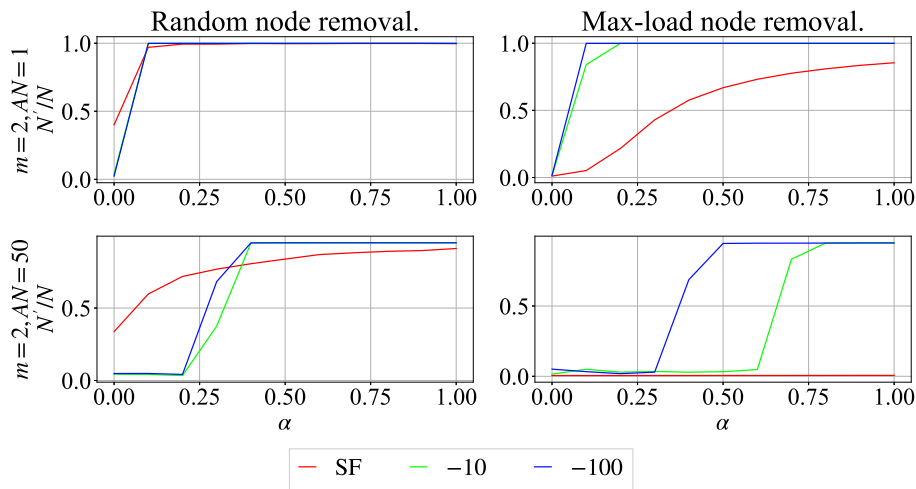
時刻 t における各ノード i の負荷 $LO_i(t)$ を, (最小ホップの) 最短経路を通るリンクの媒介中心性で定義する. その際, 耐性パラメータ $0 < \alpha < 1$ を用いて, 各ノード i で処理可能な許容負荷を以下で定義する.

$$CA_i \stackrel{\text{def}}{=} (1 + \alpha)LO_i(0).$$

もし $LO_i(t+1) > CA_i$ なら, ノード i は過負荷となって機能不全に陥り, それら機能不全な i の新たなノード除去で更に最短経路が更新され, 収束するまで上記の処理を同様に行う.

A.E.Motter, Physical Review Letters 93(9), 2004.

α に対する連結成分のサイズ比 N'/N

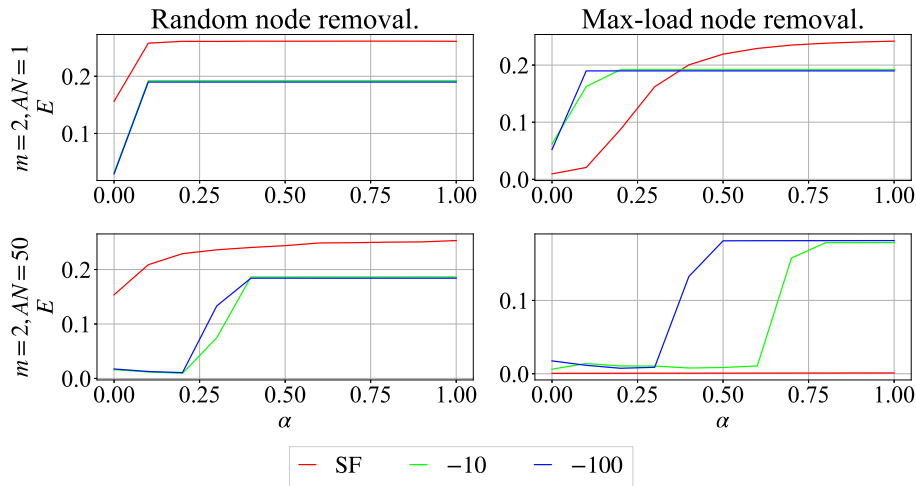


⇒ β 大ほど、小さな α でも連鎖故障を抑えて連結性を保持できる！

楠&林, 日本応用数理学会 2022 年度年会.

α に対する通信効率 E

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \frac{1}{L_{ij}}. \quad (2)$$



楠&林, 日本応用数理学会 2022 年度年会.

カスケード故障のまとめ

- べき乗次数分布の SF ネットワークより, 分布幅が狭く分散が小さい次数分布でランダムレギュラーグラフに近い (β 値が大きい) ほど, カスケード故障を抑制して連結性を保持できる.
- 分断後も通信効率 は SF ネットワークの方が若干高くなることが多いが, 複数の最大負荷ノード攻撃では, ランダムレギュラーグラフに近い (β が大きい) ほど耐性パラメータ α 値が小さくて (余り許容できなくて) も通信効率が落ちない
- 連結性と通信効率の上記の傾向はどちらも, ランダムノード攻撃より最大負荷ノード攻撃で, しかも複数攻撃の方が顕著となる.

⇒ 平等に近い次数分布のネットワークでは, 最短ですら代替経路が複数存在して迂回でき, 過負荷連鎖によるカスケード故障を抑制することが可能

7. 不平等から平等へ

超優先的選択 k^ν , $\nu > 1$: 巨大ハブがリンクを独占する星型



優先的選択 k : SF ネットワーク (BA モデル), $P(k)$ はべき乗分布



ランダム選択 k^0 : $P(k)$ は指数分布



逆優先的選択 $k^{-\beta}$: $P(k)$ はより幅の狭い分布



最小次数選択 $k^{-\infty}$: ほぼレギュラグラフ, 但し鎖状構造も創発

強者 (多数リンクを保持するノード) に繋がった不平等な次数分布より,
(少数リンクのノード) 弱者に繋がった平等な次数分布の方が, ネットワークの結合耐性が強くなる!

一方, 若い弱者同士だけで繋がると, 年配者と隔たって逆に切れやすくなってしまふ