

修士論文

変化する次数分布でのモジュール構造がネットワークの頑健性に与える影響

和氣 拓生

主指導教員 林 幸雄

北陸先端科学技術大学院大学 金沢大学
(融合科学)

令和6年3月

Abstract

Scale-free networks are observed in various real-world systems such as the internet and social networks. These networks consist of hubs with a large number of links and many nodes with fewer links, and the growth of scale-free networks is significantly influenced by the mechanisms of "conscious preferential selection" and "unconscious replication." Consequently, the network evolves over time, developing a highly imbalanced structure. However, this structure is extremely vulnerable to hub attacks, and it is known that damage to critical hubs can substantially impair the overall functionality of the network.

Traditional studies have suggested that the robustness of networks is associated with the degree of correlation between nodes. However, recent findings have revealed that "loop structures" and other characteristics are crucial for robustness. In particular, it has been shown that the size of the Feedback Vertex Set (FVS) in random graphs is strongly related to resistance to attacks. The FVS is a set of nodes that must be removed to eliminate loops from a graph. Yet, calculating the minimal FVS is NP-hard, and it is particularly challenging for large-scale networks.

To address this problem, different methods such as probabilistic propagation via the Cavity method, link redistribution through the Wu-Holme method, and an increase in the number of spanning trees are being used for loop reinforcement. These methods have revealed a strong correlation between the minimal FVS size and the robustness of the network. Loop reinforcement has been shown to homogenize the degree distribution and significantly enhance the network's robustness.

Furthermore, the modular structure of a network also greatly impacts its robustness. Networks with low modularity may be vulnerable to specific weaknesses. However, it has been clarified that enhancing modularity through rewiring from inter-module links to intra-module links makes the network even more vulnerable to attacks. In addition, to explore the impact of modularized networks on robustness across various degree distributions, improved methods have been used in this study to minimize the impact on degree distribution, as traditional rewiring methods significantly alter it.

In this experiment, we evaluated the robustness of networks based on scale-free networks, EXP networks, and networks using the IPA model with inverse preferential attachment, against degree-based attacks, betweenness centrality attacks, and module-based attacks. The main findings are summarized as follows:

In scale-free networks utilizing the GN model, as the rewiring parameter w increases, the network's robustness against node removal decreases. Networks with a higher number of modules are more robust against node removal compared to those with fewer modules. While networks with more modules can withstand partial isolation, if there are a few large modules, the entire network is significantly affected by attacks.

Furthermore, examining the impact of degree-based attacks, betweenness centrality attacks, and module-based attacks on EXP networks revealed that an increase in modularity $Q(W)$ tends to decrease the network's robustness against these attack methods. Networks with fewer modules exhibit a more significant decrease in robustness due to increased modularity. This is believed to be because attacks on a small number of modules

have a significant impact on the entire network.

Moreover, networks with a narrow degree distribution (generated by the IPA model with $\beta = 100$) are more robust against the three types of attacks. In such networks, attacks are less likely to concentrate on specific high-degree nodes, enhancing the network's overall resistance to attacks. As the number of modules increases, the rate of decrease in the robustness metric also increases. In the case of a narrow degree distribution, this decrease rate is distributed across the network's degrees uniformly, dispersing vulnerability to attacks.

These results suggest that in designing networks, it is crucial to consider the balance between modularity and the number of modules, as well as the characteristics of the degree distribution. To maximize robustness against attacks, it is essential to not only focus on the level of modularity but also take into account the characteristics of the degree distribution and maintain a proper balance between the two. In networks with a narrow degree distribution, even with fewer modules, the network can maintain a certain level of resilience. However, in networks with a wide degree distribution, increasing the number of modules can enhance resistance to attacks.

目次

第1章	はじめに	1
1.1	研究背景・目的	1
1.2	本論文の構成	1
第2章	ネットワーク科学の基礎	2
2.1	ネットワーク科学についての概要	2
2.2	ハブ攻撃に対する極端な脆弱性	3
2.2.1	スケールフリーネットワークについて	3
2.2.2	ネットワークの成長メカニズム	3
2.2.3	スケールフリー構造の脆弱性	4
2.3	ネットワーク科学における次数分布の概念と重要性	4
2.3.1	次数分布の定義	4
2.3.2	次数分布の類型	4
2.3.3	次数分布の重要性	5
2.4	次数相関と頑健性	5
2.5	攻撃に対する頑健性指標	5
第3章	頑健性指標とネットワーク構造の関連性	7
3.1	頑健性指標に関する先行研究	7
3.2	ネットワークの生成モデル	8
3.3	Graph-tool とは	8
3.4	逆優先的選択モデルの Graph-tool による実装	9
3.5	モジュール構造と頑健性	9
第4章	変化する次数分布における モジュール化ネットワーク	11
4.1	モジュール間 (inter) リンクからモジュール内 (intra) リンクへのリワイヤ リング手法	11
4.1.1	アルゴリズムの詳細な主要ステップ	12
4.1.2	リンク追加の3段階手順	12
4.1.3	final_w の役割と重要性	13
4.2	3つの攻撃手法	14
4.2.1	次数順攻撃	14
4.2.2	媒介中心性攻撃	14
4.2.3	モジュールに基づく攻撃	14

第 5 章	実験・評価	15
5.1	モジュール化ネットワークへのリワイヤリング	15
5.1.1	モジュール性と w の対応	15
5.1.2	リワイヤリングの可視化図	18
5.1.3	既存手法と提案手法を次数分布で比較	20
5.2	攻撃による最大連結成分と 2 番目の連結成分	23
5.3	モジュール性 Q と攻撃による頑健性指標 R	34
第 6 章	おわりに	39
6.1	今後の展望	39
	謝辞	40

目次

1	提案手法のリワイヤリングのイメージ図	11
1	ノード数 1000 の $\nu=1$ の GN モデルで生成したスケールフリーネットワークに対して、提案手法で $m_0 = 5$ としてリワイヤリングした際の可視化図。w の割合を 0, 0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95 と変化。	18
2	ノード数 1000 の $\nu=0$ の GN モデルで生成したネットワークに対して、提案手法で $m_0 = 5$ としてリワイヤリングした際の可視化図。w の割合を 0, 0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95 と変化。	18
3	ノード数 1000 の $\beta = 5$ の IPA モデルで生成したネットワークに対して、提案手法で $m_0 = 5$ としてリワイヤリングした際の可視化図。w の割合を 0, 0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95 と変化。	19
4	ノード数 1000 の $\beta = 100$ の IPA モデルで生成したネットワークに対して、提案手法で $m_0 = 5$ としてリワイヤリングした際の可視化図。w の割合を 0, 0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95 と変化。	19
5	$\nu=1$ の GN モデルで生成したネットワークを $m_0 = 5$ としてリワイヤリング後の次数分布	21
6	$\nu=0$ の GN モデルで生成したネットワークを $m_0 = 5$ としてリワイヤリング後の次数分布	21
7	$\beta=5$ の IPA モデルで生成したネットワークを $m_0 = 5$ としてリワイヤリング後の次数分布	22
8	$\beta=100$ の IPA モデルで生成したネットワークを $m_0 = 5$ としてリワイヤリング後の次数分布	22
9	$\nu=0, 1$ の GN モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 5$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分	24
10	$\beta=5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 5$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分	25
11	$\nu=0, 1$ の GN モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 20$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分	26
12	$\beta=5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 20$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分	27

13	$\nu=0, 1$ の GN モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 50$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分	28
14	$\beta=5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 50$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分	29
15	$\nu=0, 1$ の GN モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 20$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分	30
16	$\beta=5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 200$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分	31
17	$\nu=0, 1$ の GN モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 1000$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分	32
18	$\beta=5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 1000$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分	33
19	$\nu=1$ の GN モデルで生成したスケールフリーネットワークのリワイヤリング後のネットワークにおける (a) 次数順攻撃、(b) 媒介中心性攻撃、(c) モジュールに基づく攻撃による頑健性の変化。	35
20	$\nu=0$ の GN モデルで生成したネットワークのリワイヤリング後のネットワークにおける (a) 次数順攻撃、(b) 媒介中心性攻撃、(c) モジュールに基づく攻撃による頑健性の変化。	36
21	$\beta=1$ の IPA モデルで生成したネットワークのリワイヤリング後のネットワークにおける (a) 次数順攻撃、(b) 媒介中心性攻撃、(c) モジュールに基づく攻撃による頑健性の変化。	37
22	$\beta=1000$ の IPA モデルで生成したネットワークのリワイヤリング後のネットワークにおける (a) 次数順攻撃、(b) 媒介中心性攻撃、(c) モジュールに基づく攻撃による頑健性の変化。	38

表 目 次

5.1	$\nu=1$ の GN モデルで生成したスケールフリーネットワークに対して、提案手法でリワイヤリングした際のモジュール数 m_0 における w と Q の対応表	16
5.2	$\nu=0$ の GN モデルで生成したネットワークに対して、提案手法でリワイヤリングした際のモジュール数 m_0 における w と Q の対応表	16
5.3	$\beta=1$ の IPA モデルで生成したネットワークに対して、提案手法でリワイヤリングした際のモジュール数 m_0 における w と Q の対応表	16
5.4	$\beta=3$ の IPA モデルで生成したネットワークに対して、提案手法でリワイヤリングした際のモジュール数 m_0 における w と Q の対応表	17
5.5	$\beta=5$ の IPA モデルで生成したネットワークに対して、提案手法でリワイヤリングした際のモジュール数 m_0 における w と Q の対応表	17
5.6	$\beta=100$ の IPA モデルで生成したネットワークに対して、提案手法でリワイヤリングした際のモジュール数 m_0 における w と Q の対応表	17

第1章 はじめに

1.1 研究背景・目的

私たちの身の回りに存在する多くのつながりを、点(ノード)とその間の辺(リンク)からなるネットワーク構造として抽象化すると、多数のリンクを持つごく一部の巨大なハブと呼ばれるノードと少数のリンクしか持たない大部分のノードから構成されるスケールフリー構造が見られることがわかっている [1]。これらのスケールフリーネットワークは、優先的選択という原理によって生成され [2]、ランダムな故障には強いが、ハブを狙った悪意のある攻撃に対しては非常に脆弱であることが数値シミュレーションと理論解析の双方から示されている [3]。しかしながら、攻撃に対して最適な頑健性を持つには、次数相関が正である玉葱状構造のネットワークであることが発見された [4] もの、逐次成長に伴いネットワークのループ構造を強化しながらネットワークを玉葱状構造にする手法 [5] や逆優先的選択によって玉葱状構造を出現させる手法 [6] なども提案され、次数相関よりもループ構造の強化や次数分布がより重要であることが示されている。

この研究領域での新たな課題は、ネットワーク内のモジュール構造が頑健性に与える影響の解明である。モジュール構造は、ネットワーク内で密に結ばれたノード群の集まりであり、各モジュールは特定の機能を担いながらも、全体のネットワーク構造において重要な役割を果たす。本研究では、変化する次数分布でのモジュール化ネットワークが、頑健性にどのような影響を与えるのかを明らかにすることを目指す。

1.2 本論文の構成

本論文の構成を以下に示す。第2章では、「ネットワーク科学の基礎」と題し、多様な学問分野からのアプローチを通して複雑なネットワークを分析・理解することを目指す。

第3章では、ネットワークの頑健性について、特に次数相関、ループ構造、次数分布とモジュール性の観点から調査し、それらがネットワークの頑健性にどのように影響を及ぼすかを議論する。

第4章では、連続的に変化する次数分布を持つネットワーク内においてモジュール性を高めるためのリワイヤリング手法を紹介し、その詳細なアルゴリズムと効果を評価するための重要指標を詳述する。また、ネットワーク攻撃の3つの異なる手法—一次数順攻撃、媒介中心性攻撃、およびモジュールに基づく攻撃—を紹介し、それぞれの効果と特徴を検討する。

第5章では、連続的に変化する次数分布を持つネットワークの生成とモジュール化を通じて、その構造的特性と攻撃に対する頑健性についての詳細な分析を行う。

第6章では、本研究のまとめを行う。

第2章 ネットワーク科学の基礎

2.1 ネットワーク科学についての概要

ネットワーク科学は、様々な学問分野にまたがる融合的な視点から理解することが可能である。この分野は、物理学、数学、コンピュータ科学、社会学、生物学など多岐にわたる科学の知見を統合し、複雑なネットワークを分析して理解することを目指している。

物理学

物理学的アプローチでは、ネットワークの構造とダイナミクスを理解するために、統計物理学や力学系理論などが用いられる。例えば、ノード間の相互作用やネットワーク内での情報の伝播などが研究される。

数学

数学的観点からは、グラフ理論や確率論を基にネットワーク構造を分析する。ノード（頂点）とエッジ（辺）で構成される抽象化したグラフを用いて、ネットワークのトポロジーを詳細に調べることができる。

コンピュータ科学

アルゴリズムやデータ構造を駆使して、大規模なネットワークデータを効率的に処理・分析する技術が開発されている。これには、ネットワークの可視化や機械学習も用いられる。

社会学

社会学の観点から、人々の社会的関係をネットワークとして捉え、その構造やダイナミクスを分析する。友人関係、組織内の役割分布、情報の伝播などが研究対象である。

生物学

生物学では、遺伝子やタンパク質のネットワーク、生態系内の種間相互作用などをモデル化し、生物システムの複雑性を解明しようとする。これにはシステム生物学や生態学が関連する。

ネットワーク科学の融合的なアプローチは、これらの異なる視点を統合し、より深い理解と実用的な応用を目指す。例えば、社会ネットワークの分析は、マーケティング戦略や伝染病の拡散予測に活用される一方で、生物学的ネットワークの研究は、新薬の発見や生態系の保全戦略に役立てられている。ネットワーク科学は、これらの異なる分野の境界を越えて、新しい知見と技術の開発を推進している。

2.2 ハブ攻撃に対する極端な脆弱性

2.2.1 スケールフリーネットワークについて

スケールフリーネットワークは、インターネット、交通網、社会的ネットワークなど、様々な実世界のシステムで見られる [7]。これらのネットワークでは、いくつかの主要なハブがネットワーク全体の大部分のトラフィックや情報の流れを支配している。例えば、インターネットの主要なルーターや交通網の主要交通ハブが攻撃または故障すると、システム全体の効率や機能が大幅に低下する可能性がある。このようなシステムの脆弱性は、極端な場合には深刻な社会的、経済的影響を及ぼす。

スケールフリーネットワークとは、特定の数のハブ（非常に多くのリンクを持つノード）と、それよりもはるかに多い少数のリンクを持つノードで構成されている。このネットワークは、一部のノードが異常な数の接続を持ち、自然界や人工システムの多くで見られる。

2.2.2 ネットワークの成長メカニズム

スケールフリーネットワークの成長においては、意識的な優先的選択と無意識的な複製のメカニズムが重要な役割を果たす。これらのメカニズムは、ネットワークの構造とダイナミクスに深い影響を及ぼす。

意識的な優先的選択: 新しいノードがネットワークに加わる際、既に多くのリンクを持つハブへの接続を優先する傾向がある [2]。これは「Rich get richer」の原則または「金持ちはより金持ちになる」とも呼ばれ、既に人気のあるノードがさらに人気を集める現象を指す。これにより、一部のノードが大量のリンクを集め、ネットワーク内で重要な地位を占めるようになる。

無意識的な複製: ネットワーク内での新しいリンクの形成は、既存のリンクパターンを模倣することによっても生じる [8]。このプロセスは、ネットワーク内での情報の流れや既存のノード間の関係を基に、新しいノードが接続先を決定するということである。この無意識的な複製は、既存のネットワーク構造を強化し、新しいノードが既に確立されたハブにリンクする可能性を高める。

これらのメカニズムにより、スケールフリーネットワークは時間とともに進化して、一部のノードが大量のリンクを集める傾向が強まる。これによって、ネットワークは少数の非常に重要なハブと、それらに直接または間接的に接続された多数のノードから成る非常に不均衡な構造を持つようになる。このダイナミックな成長パターンは、ネットワークの効率性と脆弱性の両方に影響を与え、その後の構造と機能において決定的な役割を果たす。

2.2.3 スケールフリー構造の脆弱性

スケールフリーネットワークは、ハブ攻撃に対して極端に脆弱である [3]。少数のハブがネットワークの大部分のトラフィックや情報の流れを支配しているため、これらのハブが損傷または除去されると、ネットワーク全体の機能が著しく低下する。この脆弱性は、ネットワークの非中央集権化の欠如に起因する。したがって、ハブの保護とネットワークの冗長性を高めることが、全体の耐久性を高める上で重要である。

以上のように、スケールフリーネットワークの理解は、これらのシステムの強化と脆弱性の低減に役立つ。特に、ハブの保護とネットワークの冗長性を高めることで、全体の耐久性を高めることができる。この知識を活用することで、実世界の多くのシステムにおけるリスク管理と効率化が可能となる。

2.3 ネットワーク科学における次数分布の概念と重要性

2.3.1 次数分布の定義

次数分布 $p(k)$ は、ネットワーク理論において中心的な役割を果たす。この分布は、ネットワーク内の各ノードが持つエッジ（接続）の数、すなわちノードの次数の確率分布を示す。具体的には、 $p(k)$ はネットワーク内の任意のノードが次数 k を持つ確率を表す。

2.3.2 次数分布の類型

次数分布は、主に以下の三つに分類される。

1. 均一分布 (Uniform Distribution) : この分布では、ネットワーク内のすべてのノードがほぼ同数のエッジを持つ。完全グラフや正則グラフがこの分布の典型例である。
2. 指数分布 (Exponential Distribution) : この型のネットワークでは、次数が高いノードの数は指数関数的に減少する。一様ランダムグラフはこの分布に近い。
3. べき乗則分布 (Power-law Distribution) : この分布を持つネットワークでは、高次数のノードは少数であり、低次数のノードが多数を占める。スケールフリーネットワークが代表的であり、インターネットやソーシャルネットワークなど、実世界の多くのネットワークがこの特徴を示す。

2.3.3 次数分布の重要性

次数分布は、ネットワークの構造的特性を解析する上で重要な役割を果たす。これにより、ネットワークがどの程度密接に接続されているか、また特定のノードがネットワーク内でどのような役割を担っているかを理解することが可能となる。また、ネットワークの頑健性を分析する際にも、次数分布は重要な指標となる。例えば、べき乗則分布を持つネットワークは、ランダムな障害に対しては強い耐性を示すが、ハブとなる高次数のノードを狙った攻撃には脆弱であることが知られている。

2.4 次数相関と頑健性

ネットワーク科学において、次数相関は隣接するノード間の次数の相関を指し、ネットワークの構造的特徴とその頑健性に重要な影響を与える。この相関は、Pearson の相関係数をリンクの両端のノードの次数に適用することで定量化され、以下の式で定義される [9]。

$$r = \frac{\sum_{ij}(A_{ij} - k_i k_j / 2M) k_i k_j}{\sum_{ij}(k_i \delta_{ij} - k_i k_j / 2M) k_i k_j} \quad (2.1)$$

ここで、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号を表し、 $i = j$ のとき 1、 $i \neq j$ のとき 0 となる。また、式 (2.1) を変形することで次式が得られる [9]。

$$r = \frac{S_1 S_e - S_2^2}{S_1 S_3 - S_2^2} \quad (2.2)$$

この式における各項は以下のように定義される。

$$S_1 = \sum_i k_i, \quad S_2 = \sum_i k_i^2, \quad S_3 = \sum_i k_i^3, \quad S_e = \sum_{ij} A_{ij} k_i k_j \quad (2.3)$$

次数相関係数 r の取りうる値は $-1 \leq r \leq 1$ であり、 $r > 0$ の場合は正の次数相関を示し、次数が似たノード同士が接続する傾向があることを意味する。一方で、 $r < 0$ の場合は負の次数相関を示し、次数が異なるノード同士が接続する傾向がある。これらの次数相関は、ネットワークの構造と動的特性を理解する上で重要な指標となる。

2.5 攻撃に対する頑健性指標

グラフ理論において、グラフはノード（頂点）とエッジ（辺）から構成される。ノードとはグラフの個々の点のことであり、エッジはこれらの点を結ぶ線である。連結成分は、このグラフの中で互いに接続されているノードの集まりを指す。

最大連結成分は、ネットワーク内の最も大きな連結成分である。ネットワークが攻撃にさらされた際、最大連結成分のサイズの変化はネットワークの頑健性を評価する重要な指標である。サイズが大きければ、ネットワークは一般的に攻撃に対してより頑健であると考えられる。

頑健性指標 R は、ネットワークが攻撃によってどの程度分断されるかを示し、本研究では、ネットワークの最大連結成分のサイズの変化を基に計算する [10]。その定義は以下である。

$$R = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N S(q)/N, \quad (2.4)$$

頑健性指標 R は、ノード除去を行った際にネットワークの連結性がどの程度保たれているかを評価する。具体的には、ネットワークのノードを割合 q で除去した場合の除去率ごとの最大連結成分比の総和を用いて頑健性指標 R を以下の式で評価する。ここで、 N はネットワークのノード数、 $S(q)$ はノード除去率 q の時の最大連結成分のサイズである。最大連結成分とは、ネットワーク内で連結している最大のノード群を指し、この成分が 0 になるとネットワークは完全に断絶する。除去率 q の範囲は $0 < q < 1$ であり、頑健性指標 R の値の取りうる範囲は $0 < R < 0.5$ である。

第二の連結成分は、最大連結成分に次いで 2 番目に大きな連結成分である。攻撃による影響を受けて最大連結成分が減少すると、第二の連結成分のサイズが増加することがある。 q_c は、ノードを除去する割合 q の中で第二の連結成分が最大となる点である。ネットワークにおいてノードを除去していくと、最大連結成分のサイズは徐々に減少することがある。同時に、第二の連結成分のサイズは最初は小さいかもしれないが、ノードの除去が進むにつれて最大連結成分のサイズが小さくなり、他の連結成分が成長する可能性がある。 q_c はこの第二の連結成分が最大になるノード除去の割合である。 q_c が最大になる点は、ネットワークの最大連結成分が急激に崩れるポイントであり、これはネットワークが著しく分断される「臨界点」を示している。

第3章 頑健性指標とネットワーク構造の 関連性

3.1 頑健性指標に関する先行研究

これまでの研究では、ノード間の次数相関が高いほどネットワークが頑健になるとされてきた [4, 5, 10, 11]。最近では、次数相関とは別のアプローチとして「ループ構造」に着目する研究が増えている。Braunstein ら (2016) は、ランダムグラフにおいて、攻撃に対するノード集合 (Dismantling Set) とループに関するノード集合 (Feedback Vertex Set, FVS) が等価な比率を示すことを発見した [12]。また、Hayashi (2018) は、仲介ノードを通じて長いループを形成する新しいネットワーク生成モデルを提案し、その頑健性を示した [5]。このモデルにおいて、最小 FVS サイズと攻撃耐性との間に強い関連性が見られる。

Feedback vertex set (FVS) とは、グラフのノードの部分集合で、そのノードを除去したとき、グラフが閉路をもたなくなるようなものである。最小 FVS は、グラフから閉路をすべて除去するために必要なノードの最小数を含むノード集合である。つまり、最小 FVS はそのグラフから最小数のノードを取り除くことで、残りのグラフが木構造になるようなノードの集合を指す。

しかしながら、最小 FVS を求める問題は NP 困難であり、大規模ネットワークでは計算が困難である。そこで、以下の3つの手法でループ強化が行われた。

1. 次数 k_i が最大のノード間のリンク除去、それら最小のノード間にリンク追加する手法 [15]、
2. Cavity 法を用いた確率伝播法で計算される各ノードの最小 FVS 属する確率 q_i^0 を使用する手法 [13]、
3. スパニングツリーの数を増やす手法 [14] である。

上記の結果から、次数変化の有無にかかわらず、頑健性と最小 FVS サイズとの間には非常に強い関連性が存在することが明らかになった。しかしながら、これまで考えられてきた次数相関と頑健性の関係は、最小 FVS サイズとの関連性よりも弱いことが判明し、特に次数が変化する場合、負の次数相関でも高い頑健性が達成可能であることが示された [15]。

このように、ループを強化することで攻撃に対する頑健性を向上させる手法が提案されてきた [15]。特に、ループの強化により次数分布が均質化されることで、頑健性が大幅に向上することが明らかになっている [16]。仲介によるループの強化によって生成される玉ねぎ状ネットワークは、広い裾野を持つべき分布ではなく、より狭い範囲の次数分布

を示している [11]。また、次数が変化するループ強化リワイヤリングでは、次数分布が平均次数に集中する狭い分布に変化し、攻撃に対する頑健性と最小 FVS サイズの両方が大幅に向上することが確認されている [15]。さらに、リンク追加法においても、最小次数戦略によって次数分布の分散が減少し均質化することで、攻撃に対する頑健性が向上している [17]。

これらの結果 [11, 15, 16, 17] から、ループの強化による攻撃に対する頑健性の向上には、次数分布の均質化という共通点がある。したがって、次数分布が均質であるほど攻撃に対して頑健であると予想される。特に、次数分布の分散が最小である、すべてのノードが同じ次数を持つレギュラグラフが最も頑健である可能性が示唆されている [17]。

3.2 ネットワークの生成モデル

前述した理論的背景を基に、次数分布の均質性とネットワークの攻撃に対する頑健性との関係をさらに詳細に探求するために、Growing Network モデル [18, 19, 20] および逆優先的選択モデル [6] を活用する。これらは、それぞれ Barabási-Albert モデル [1] を拡張したものであり、ネットワーク成長において接続確率の異なるメカニズムを提供する。具体的には、Growing Network モデルでは接続確率が $p_i \propto k_i^\nu$ ($\nu \geq 0$) と定義され、逆優先的選択モデルでは $p_i \propto k_i^{-\beta}$ ($\beta \geq 0$) となる。

これらのモデルを統合し応用することで、様々な次数分布を持つネットワークを生成できる。具体的には、べき乗分布からカットオフ付きべき乗分布、指数分布、さらにはより狭い次数分布へと、連続的に変化させることが可能である。例えば、Growing Network モデルを用いると、パラメータ ν 値が 0 に近づくにつれて次数分布の分散が減少する傾向が確認できる。一方、逆優先的選択モデルでは、 β 値が 0 から大きくなるほど分散さらには小さくなるが、分散がゼロになることはなく、ある一定値以下には減少しないという特徴が観察される。このように、次数分布の均質性とネットワークの攻撃に対する頑健性との間には密接な関係があることが示唆される。これらの生成モデルを通じてその関係をより深く理解することが可能である。

ところで、大きな β 値の逆優先的選択モデルで生成されたネットワークは、鎖状構造を持つことが知られている。しかしながら、本章では次数分布の変化が頑健性に与える効果に焦点を当てているため、このような構造は考慮から除外したい。具体的には、コンフィギュレーションモデル [23, 24] を使用してネットワークをランダム化し、鎖状構造を排除する。この適用により、鎖状構造が取り除かれたネットワークが得られる。逆優先的選択モデルで鎖状構造が現れるのは、 $\beta \rightarrow \infty$ の場合、新規ノードが最小次数のノードに接続するためであることを付記しておく [6]。

3.3 Graph-tool とは

Graph-tool は Python のライブラリであり、複雑なネットワークの構築、分析、可視化を行うための強力なツールである [21]。このライブラリは効率的なデータ構造とアルゴリズムを用いており、大規模なグラフの操作に適している。Graph-tool は C++ で実装されており、計算効率が高い。Python の使いやすさと組み合わせ、グラフ理論の研究や複雑なネットワーク解析に広く用いられている。特に、後述する頑健性の解析をはじめ、

ネットワークの基本的な指標である次数分布、クラスタリング係数、最短経路長、コミュニティ検出などが分析可能である。但し、一部にバグが見つかり、その改良部分については付録にて述べる。

3.4 逆優先的選択モデルの Graph-tool による実装

本研究で開発したソースコードは、Graph-tool を基盤として逆優先的選択モデルに拡張されている。このモデルの実装は、特定の条件下でのネットワーク成長をシミュレートすることに焦点を当てている。以下は、その主要なステップである。

1. 初期ネットワークの生成: 完全グラフを基に、初期ノード数が設定されたネットワークを作成する。この完全グラフは、すべてのノード間にエッジが存在する無向グラフである。
2. ノードの追加: 定義したノード数に達するまで、新しいノードをネットワークに追加していく。各ステップで、1つの新しいノードが既存の m 個のノードに接続される。
3. 逆優先的接続: 既存の各ノードの次数を β 乗した値の逆数を取り、これに基づいて新しいノードから既存ノードに接続される確率を計算する。この確率は、次数が低いノードほど新しいノードに接続されやすくなるように設計されている。但し、多重リンクの生成を防ぐ。

この実装により、次数が低いノードに新しいノードが接続されることで、次数分布の均一化が促進される。Graph-tool の強力なグラフ処理機能を活用して、効率的なデータ構造を用いて大規模なネットワークを迅速に生成することが可能である。

3.5 モジュール構造と頑健性

ネットワークのモジュール構造は、頑健性に大きな影響を及ぼす重要な要素である。モジュール性が高いネットワークは、社会的ネットワークや生物学的ネットワーク、交通ネットワークなど現実に多く存在する。ネットワークの頑健性の観点からは、モジュール構造の存在がネットワークの結合耐性や回復力にどのように影響を与えるかを理解することが不可欠である。次章では、モジュール構造がネットワークの頑健性にどのような影響を及ぼすかを詳細に分析し、その意義を議論する。

モジュール性 Q は、ネットワーク内でノードがどれだけコミュニティ内で密に接続されているかを数値化する指標であり、次式で定義される。

$$Q = \frac{1}{2L} \sum_{i,j} \left[a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2L} \right] \delta(c_i, c_j) \quad (3.1)$$

ここで、 a_{ij} は隣接行列の要素、 k_i と k_j はノード i とノード j の次数、 L はリンクの総数、 $\delta(c_i, c_j)$ はクロネッカーのデルタ関数である。モジュール性が高いほど、ネットワークは強いコミュニティの結束を持つと解釈される。

先行研究 [22] では、モジュール間 (inter) リンクからモジュール内 (intra) リンクへのリワイヤリングを通じて異なるモジュール性を持つ BA モデルのネットワークを構築して、次数順攻撃と媒介中心性攻撃に対する最大連結成分と 2 番目の連結成分の影響を調べている。

第4章 変化する次数分布における モジュール化ネットワーク

4.1 モジュール間 (inter) リンクからモジュール内 (intra) リンクへのリワイヤリング手法

Graph-tool を用いて生成したネットワークに対して、次数分布の影響のみを考慮するため、コンフィギュレーションモデル [23, 24] を使用してネットワークをランダム化した後、モジュール性を高めるためにモジュール間 (inter) リンクからモジュール内 (intra) リンクへのリワイヤリングを行う [22]。グラフのノード間のリンクを再配線することで、モジュール内リンクを強化し、モジュール間リンクを減少させることを目的としている。これは、ネットワークのモジュール性を高めることに役立つ。

まず、初期設定として、各ノードに1から m_0 番のモジュール番号を一様ランダムに割り当てる。これにより、総リンク数 M 本のうち、モジュール間 (inter) リンクは $(1 - \frac{M}{m_0})$ 本、モジュール内 (intra) リンクは $\frac{M}{m_0}$ 本となる。モジュール間 (inter) リンクからモジュール内 (intra) リンクへのリワイヤリングは、その割合パラメータ w をかけて、 $(1 - \frac{M}{m_0})w$ 回が行われる。しかしながら、従来手法のままリワイヤリングを行うと、5.1.3 に示すように、リワイヤリング前後で次数分布が大幅にずれてしまう。それを避け、次数分布による影響を測定するために改良法を提案する。

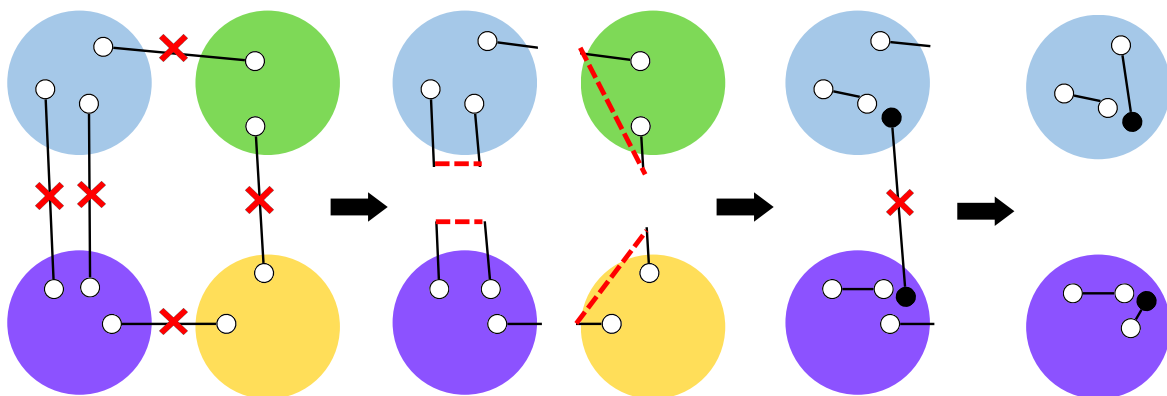


図 1: 提案手法のリワイヤリングのイメージ図

4.1.1 アルゴリズムの詳細な主要ステップ

Step1. ノードデータの取得と整理

- グラフ g の各ノード i に関する次数 k_i の情報を NumPy 配列として取得する。この配列にはノード ID とモジュール番号が含まれている。

Step2. リンクのリワイヤリングの初期処理

- NumPy 配列を用いてノードデータを表現し、データフレームに変換する。
- 次に、モジュール間リンクの数とリワイヤリング割合 w に基づき、削除するリンクの数を計算する。

Step3. モジュール間リンクの削除

- 選択された数のモジュール間リンクをランダムに削除し、それらのリンクを形成するノードの情報を記録する。
- ソートされたノードに対して、同じモジュールに属する他のノードとの新たなリンクを形成することを目指す。この際、すでにリンクが存在するノードは除外される。

Step4. リンクの追加

- 後述する 4.2.1 リンク追加の 3 段階手順で詳しく述べる。

Step5. 最終的な w の値を計算

- 最終的にリワイヤリングしたリンクの割合 (`final_w`) を計算し、モジュール間リンクの元の数に対する割合を算出する。

4.1.2 リンク追加の 3 段階手順

Step4.1 同一モジュール内でのリンク追加

- 最初のステップでは、ノードリストから同じモジュール番号を持つノード間で新たなリンクを形成する。
- このプロセスでは、自己ループや多重リンクが生成されないように注意する。
- 選択されたノード間でリンクがまだ存在しない場合にのみ、新しいリンクを追加する。

Step4.2 特定のノードペアを利用したリンクの再配線

- ノードリスト内でペアを作れなくなった場合、新たなリンクの形成にはより複雑な手順が必要である。
- このステップでは、以下の4つのノードを特定する：
 - 1a: ノードリストに含まれているモジュール番号1のノード
 - 1b: ノードリストに含まれていないが、モジュール番号1であり、1aとの間にリンクがないノード
 - 2a: ノードリストに含まれているモジュール番号2のノード
 - 2b: ノードリストに含まれていないが、モジュール番号2であり、2aとの間にリンクがなく、1bとの間にリンクを持っているノード
- 1bと2bの間にあるリンクを削除し、新たに1aと1b、2aと2bの間にリンクを追加する。

Step4.3 ノードリストに残ったノード間でのリンク追加

- 最後のステップでは、ノードリストに残ったノードをランダムにペアリングし、それらのノード間にリンクを追加する。
- この段階でも、自己ループや多重リンクを形成しないように注意する。

4.1.3 final_w の役割と重要性

- final_w は、アルゴリズムの最終段階で計算される、リワイヤリングされたモジュール間リンクの割合である。
- 元々の計画では、特定の割合 w に基づいてモジュール間リンクを削除し、それに代わるモジュール内リンクを形成することが意図されていた。
- final_w は、アルゴリズム実行後の実際のリワイヤリング割合を示し、最初に設定された w と比較される。
- アルゴリズムの実行中に予定通りにリンクの再配線が行われないことがあるため、w と final_w の間には誤差が生じる可能性がある。
- この誤差は、ネットワークのトポロジー、既存のリンクの構造、モジュール間のリンクの分布など、多くの要因によって引き起こされることがある。
- final_w の値は、アルゴリズムの効果を評価し、必要に応じて調整や改善を行うための重要な指標である。

4.2 3つの攻撃手法

4.2.1 次数順攻撃

次数順攻撃 [3, 10] は、ネットワーク内で最も多くの接続を持つノード（ハブ）を優先的に除去する攻撃手法である。この手法は、ネットワークの効率と機能性に大きな影響を与えるノードを標的にする。次数が高いノードは通常、ネットワーク全体のコミュニケーションや情報の流れにおいて中心的な役割を果たしているため、これらのノードの除去はネットワークの効率を著しく低下させる可能性がある。この攻撃は、ネットワークのトポロジーに依存し、高次数ノードの識別と除去に基づいている。

4.2.2 媒介中心性攻撃

媒介中心性攻撃 [25] は、ネットワーク内のノード間の最短経路に基づく媒介中心性 [26] が高いノードへの攻撃を行う。媒介中心性が高いノードは、ネットワーク内の異なる部分を結ぶ重要な橋渡し役として機能しており、これらのノードを除去することで、ネットワークの分断や情報の流れの遮断が引き起こされる。この手法は、ノードの局所的な次数ではなく、ネットワーク全体の構造におけるノードの戦略的な位置に焦点を当てている。媒介中心性攻撃は、ネットワークの連結性やコミュニケーションの効率に大きな影響を及ぼす可能性がある。

4.2.3 モジュールに基づく攻撃

ネットワーク内のコミュニティ構造に着目し、コミュニティ間の接続に重要な役割を担うノードを対象とするモジュールに基づく攻撃は、次の手順に従って行われる [27]。

1. コミュニティ間を接続しているノードを特定し、これらのノードのリストを作成する。
2. 作成したリストをノードの媒介中心性に基づき降順にソートする。
3. ソートされたリストから先頭のノードを順に削除していく。

この攻撃手法における注意点は以下の通りである。

- ノード削除によって、あるコミュニティ間のリンクが断たれる場合、そのノードが他のコミュニティ間の接続に参加していない限り、リストからスキップされる。
- 攻撃は最大連結成分内のノードに限定される。すなわち、リスト内の次のノードが最大連結成分に属していない場合は、そのノードはリストの後に回される。

重要なこととして、削除されるノードのリストは再計算されない。これは、特に大規模なネットワークにおいて、リストの再計算は現実的でないためである。

第5章 実験・評価

本研究では、GNモデルにおいて、次数 k に比例した優先的選択によって生成されたSFネットワークと、 k^0 に比例した（一様ランダム選択の）次数分布が指数分布となるネットワーク、及び、逆優先的選択によるIPAモデルによって生成された次数分布が比較的均一なネットワークについて頑健性に関する考察を行った。但し、これらのネットワークにおける次数分布 $P(k)$ の実質的な影響を明らかにするため、ネットワークをランダム化し、IPAモデルに特有の鎖状構造のような特殊な構造を排除した。さらに、モジュール性を高めるためにリワイヤリングを施し、その結果として生じたネットワークに対して3種類の攻撃手法を用いたシミュレーションを実施した。

シミュレーションにおいては、ネットワークの全ノード数を $N = 10^4$ 、各時間ステップにおけるリンク数を $m = 2$ と設定した。各時間ステップにおけるリンク数 m とは、新ノードを1つずつ追加することによって生成するネットワークにおいて、ノードが追加されるたびに追加されるリンクの本数のことを指す。3.2節で述べた、GNモデルにおける優先的選択の度合いを制御するパラメータ ν は0と1、IPAモデルにおける逆優先的選択の度合いを制御するパラメータ β は1, 3, 5, 100、モジュール性を制御するパラメータ w は0, 0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95とした。また、ネットワークのモジュール数 m_0 は5, 20, 50, 200, 1000と設定し、連続的に変化する次数分布を持つネットワークに対して、モジュール性を制御する w 、モジュール数 m_0 をパラメータとして、ノード数($N = 10^4$)、各時間ステップにおけるリンク数 $m = 2$ の条件下でシミュレーションを実施した。これらのシミュレーション結果は、確率計算の乱数に応じた100個のネットワークに対して実施し、得られたデータを平均化して最大連結成分、第二の連結成分、頑健性について分析した。

5.1 モジュール化ネットワークへのリワイヤリング

5.1.1 モジュール性と w の対応

実験では、まず、 w の割合に基づくリワイヤリングを行い、3.5節で述べたモジュール性 Q を向上させた。表5.1 5.6は、各次数分布を持つネットワークをモジュール数ごとに w の割合でリワイヤリングを行った際のモジュール性 Q と w の対応表である。

モジュール数が多いほど同じ w に対するモジュール性 Q の値が高い傾向にあるが、モジュール数が1000の場合は例外である。これは、リワイヤリングの際に最大連結成分から分裂してしまったノードが存在するため、ネットワークのモジュール性が低くなってしまったことが考えられる。

w	0	0.1	0.5	0.7	0.9	0.95
$m_0 = 5$	-0.003	0.077	0.398	0.559	0.719	0.76
$m_0 = 20$	-0.001	0.094	0.474	0.664	0.854	0.902
$m_0 = 50$	0	0.097	0.489	0.685	0.88	0.929
$m_0 = 200$	0	0.096	0.488	0.684	0.881	0.931
$m_0 = 1000$	0	0.077	0.427	0.592	0.75	0.788

表 5.1: $\nu=1$ の GN モデルで生成したスケールフリーネットワークに対して、提案手法でリワイヤリングした際のモジュール数 m_0 における w と Q の対応表

w	0	0.1	0.5	0.7	0.9	0.95
$m_0 = 5$	0	0.08	0.4	0.56	0.72	0.76
$m_0 = 20$	0	0.095	0.475	0.665	0.855	0.902
$m_0 = 50$	0	0.097	0.489	0.685	0.881	0.93
$m_0 = 200$	0	0.097	0.495	0.694	0.893	0.942
$m_0 = 1000$	0	0.084	0.479	0.671	0.857	0.902

表 5.2: $\nu=0$ の GN モデルで生成したネットワークに対して、提案手法でリワイヤリングした際のモジュール数 m_0 における w と Q の対応表

w	0	0.1	0.5	0.7	0.9	0.95
$m_0 = 5$	0	0.08	0.4	0.56	0.72	0.76
$m_0 = 20$	0	0.095	0.475	0.665	0.855	0.902
$m_0 = 50$	0	0.097	0.489	0.685	0.881	0.93
$m_0 = 200$	0	0.097	0.495	0.694	0.893	0.942
$m_0 = 1000$	0	0.085	0.483	0.682	0.879	0.928

表 5.3: $\beta=1$ の IPA モデルで生成したネットワークに対して、提案手法でリワイヤリングした際のモジュール数 m_0 における w と Q の対応表

w	0	0.1	0.5	0.7	0.9	0.95
$m_0 = 5$	0	0.08	0.4	0.56	0.72	0.76
$m_0 = 20$	0	0.095	0.475	0.665	0.855	0.902
$m_0 = 50$	0	0.097	0.489	0.685	0.881	0.93
$m_0 = 200$	0	0.097	0.495	0.694	0.893	0.942
$m_0 = 1000$	0	0.086	0.484	0.683	0.881	0.931

表 5.4: $\beta = 3$ の IPA モデルで生成したネットワークに対して、提案手法でリワイヤリングした際のモジュール数 m_0 における w と Q の対応表

w	0	0.1	0.5	0.7	0.9	0.95
$m_0 = 5$	0	0.08	0.4	0.56	0.72	0.76
$m_0 = 20$	-0.001	0.094	0.474	0.665	0.855	0.902
$m_0 = 50$	0	0.097	0.489	0.685	0.881	0.93
$m_0 = 200$	0	0.097	0.495	0.694	0.893	0.942
$m_0 = 1000$	0	0.086	0.484	0.683	0.88	0.93

表 5.5: $\beta = 5$ の IPA モデルで生成したネットワークに対して、提案手法でリワイヤリングした際のモジュール数 m_0 における w と Q の対応表

w	0	0.1	0.5	0.7	0.9	0.95
$m_0 = 5$	0	0.08	0.4	0.56	0.72	0.76
$m_0 = 20$	0	0.095	0.475	0.665	0.855	0.902
$m_0 = 50$	0	0.097	0.489	0.685	0.881	0.93
$m_0 = 200$	0	0.097	0.495	0.694	0.893	0.942
$m_0 = 1000$	0	0.086	0.484	0.682	0.879	0.927

表 5.6: $\beta = 100$ の IPA モデルで生成したネットワークに対して、提案手法でリワイヤリングした際のモジュール数 m_0 における w と Q の対応表

5.1.2 リワイヤリングの可視化図

図 2, 3, 4, 5 は、ノード数 1000 の $\nu=1, 0$ の GN モデルで生成したスケールフリーネットワークと逆優先的選択の $\beta=5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワークに対して、 $m_0=5$ としてモジュール化のリワイヤリングを行った際の可視化図の例である。 w の比率に従って、モジュール構造が顕著に見えてくるのがわかる。

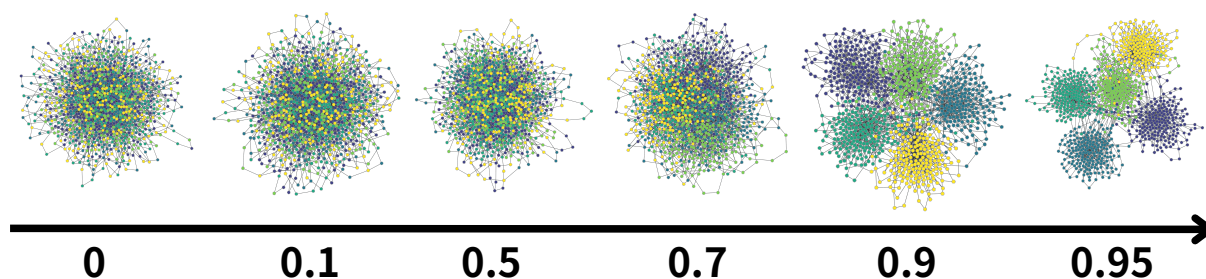


図 1: ノード数 1000 の $\nu=1$ の GN モデルで生成したスケールフリーネットワークに対して、提案手法で $m_0=5$ としてリワイヤリングした際の可視化図。 w の割合を 0, 0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95 と変化。

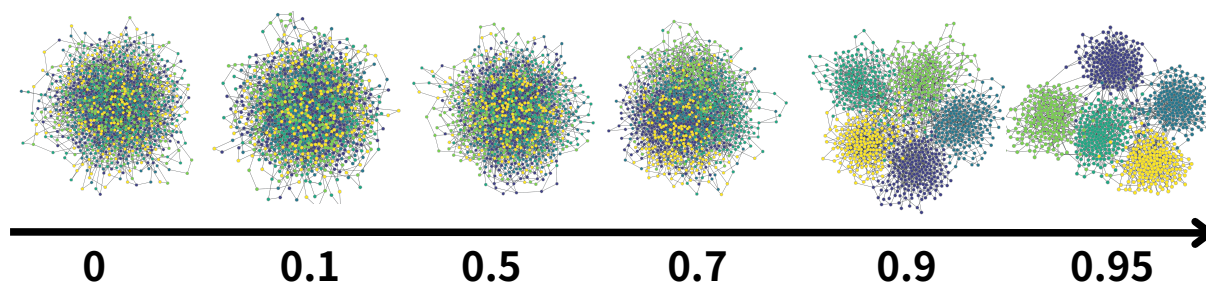


図 2: ノード数 1000 の $\nu=0$ の GN モデルで生成したネットワークに対して、提案手法で $m_0=5$ としてリワイヤリングした際の可視化図。 w の割合を 0, 0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95 と変化。

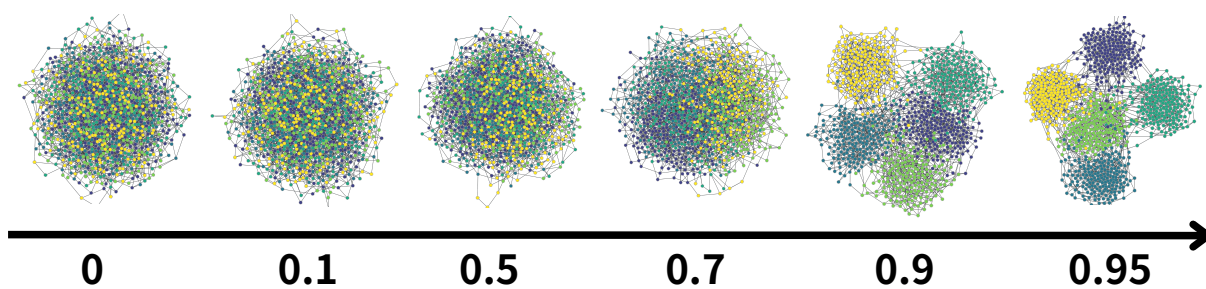


図 3: ノード数 1000 の $\beta=5$ の IPA モデルで生成したネットワークに対して、提案手法で $m_0 = 5$ としてリワイヤリングした際の可視化図。w の割合を 0, 0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95 と変化。

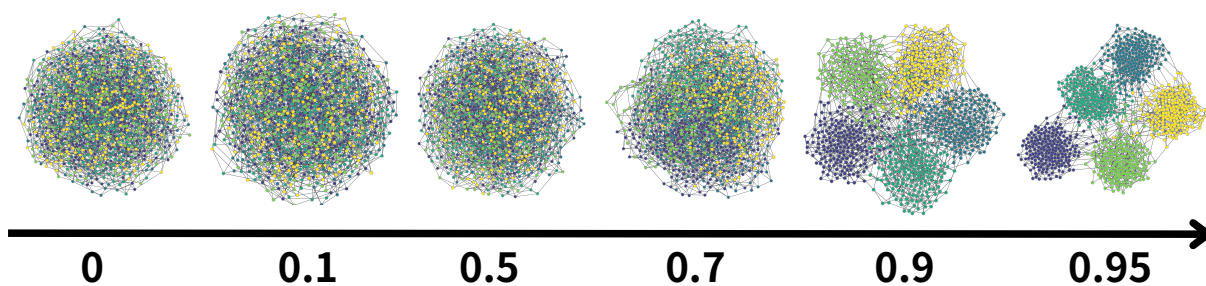
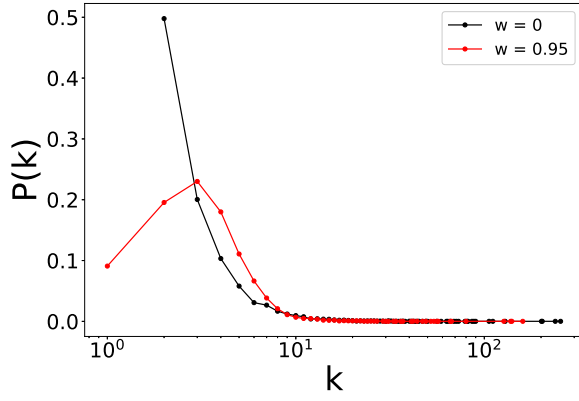


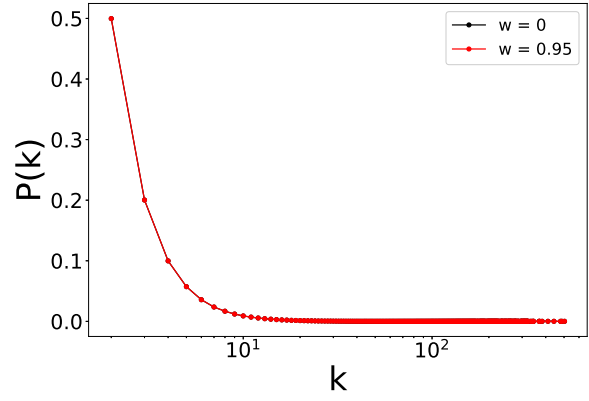
図 4: ノード数 1000 の $\beta=100$ の IPA モデルで生成したネットワークに対して、提案手法で $m_0 = 5$ としてリワイヤリングした際の可視化図。w の割合を 0, 0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95 と変化。

5.1.3 既存手法と提案手法を次数分布で比較

ここで、従来のリワイヤリング手法と提案したリワイヤリング手法との比較を行う。図 6 9 は、それぞれ $\nu=0, 1$ の GN モデルと $\beta=5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワークをモジュール数 $m_0 = 5$ で (a) 既存手法、(b) 提案手法でモジュール化リワイヤリングを行った際の次数分布である。提案手法では、リワイヤリング後も次数分布がほとんど変わらないため、連続的に変化する次数分布とモジュール化の影響のみでネットワークの頑健性を調べることができる。

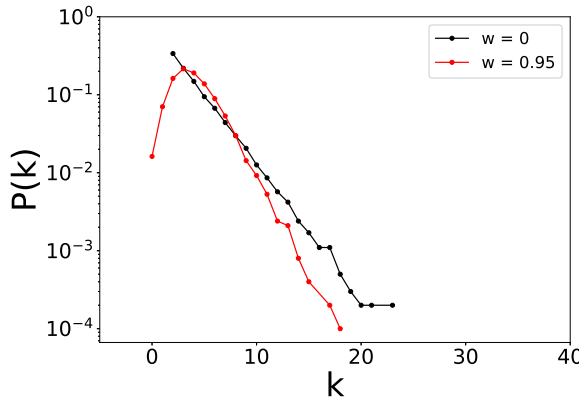


(a) 既存手法

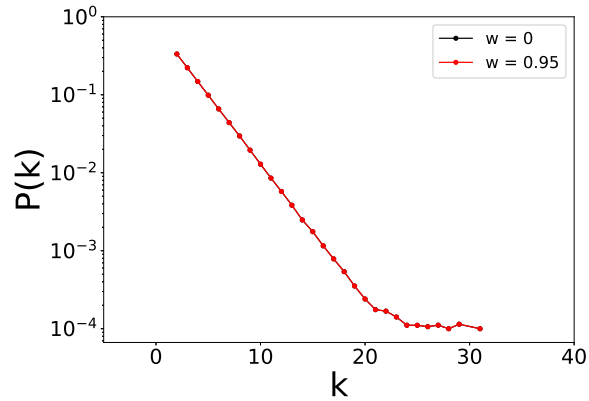


(b) 提案手法

図 5: $\nu=1$ の GN モデルで生成したネットワークを $m_0 = 5$ としてリワイヤリング後の次数分布

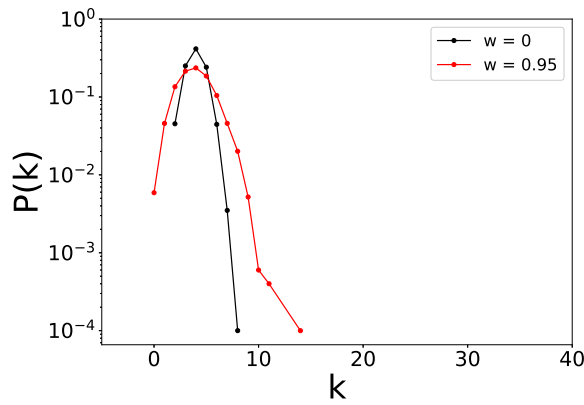


(a) 既存手法

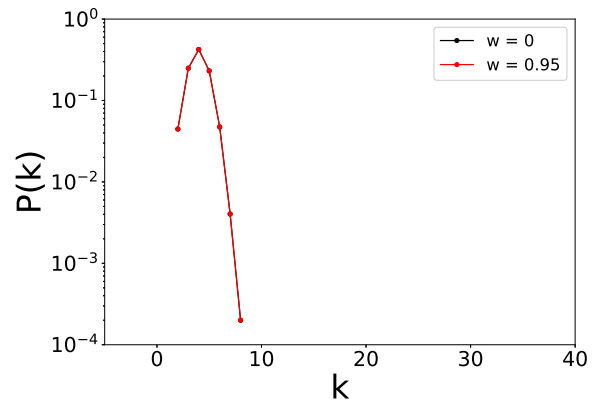


(b) 提案手法

図 6: $\nu=0$ の GN モデルで生成したネットワークを $m_0 = 5$ としてリワイヤリング後の次数分布

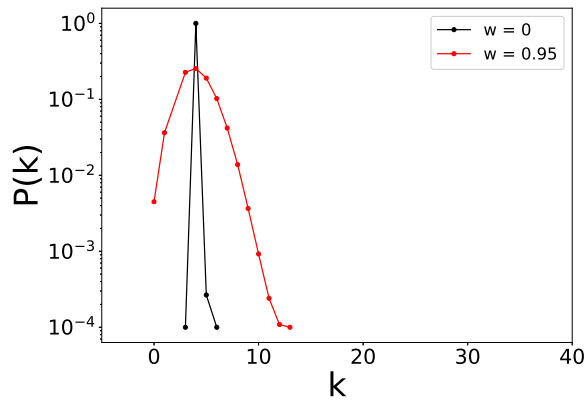


(a) 既存手法

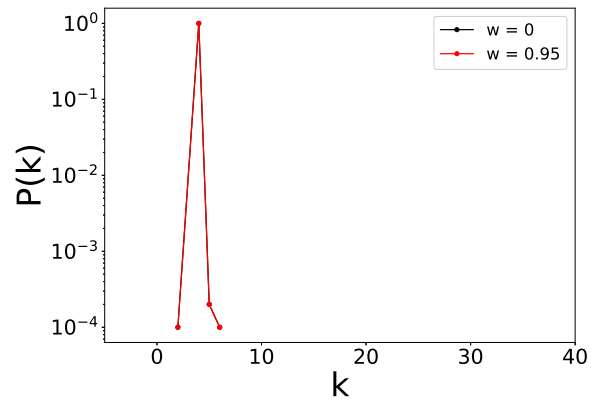


(b) 提案手法

図 7: $\beta=5$ の IPA モデルで生成したネットワークを $m_0 = 5$ としてリワイヤリング後の次数分布



(a) 既存手法



(b) 提案手法

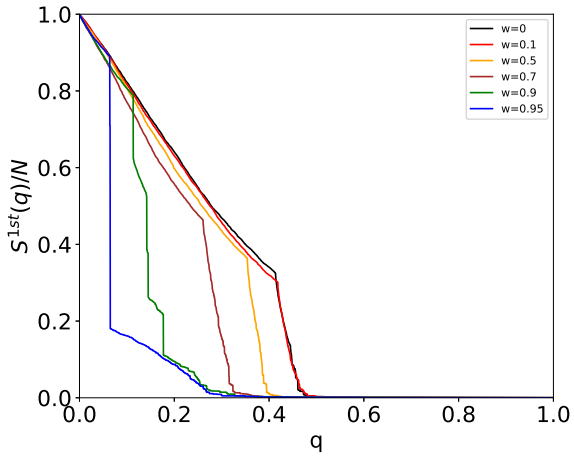
図 8: $\beta=100$ の IPA モデルで生成したネットワークを $m_0 = 5$ としてリワイヤリング後の次数分布

5.2 攻撃による最大連結成分と2番目の連結成分

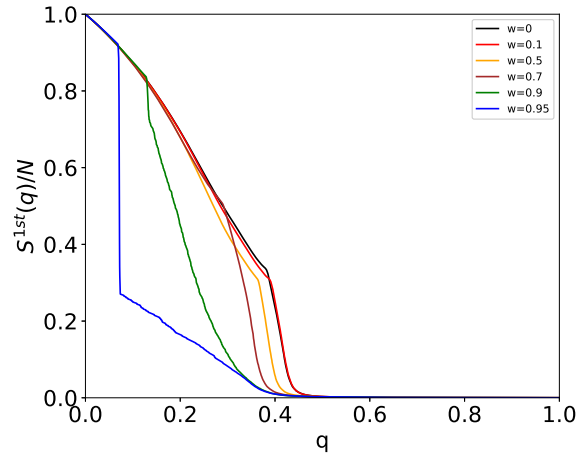
図 10, 11 は、 $\nu=0, 1$ の GN モデルで生成したネットワークと $\beta=5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 5$ 、図 12, 13 は $m_0 = 20$ 、図 14, 15 は $m_0 = 50$ 、図 16, 17 は $m_0 = 200$ 、図 18, 19 は $m_0 = 1000$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と2番目の連結成分のグラフである。

$S^{1st}(q)/N$ と $S^{2nd}(q)/N$ は、除去されたノードの割合 q の関数として、最大連結成分と2番目の連結成分のサイズをネットワークサイズ N で正規化したものである。 $q=0.0$ の時はネットワークが無傷な状態であり、 $S^{1st}(q)/N = 1$ となる。 q が減少するにつれて、ノードが除去され、 S^{1st} も減少し、ネットワークの連結性が低下していく。

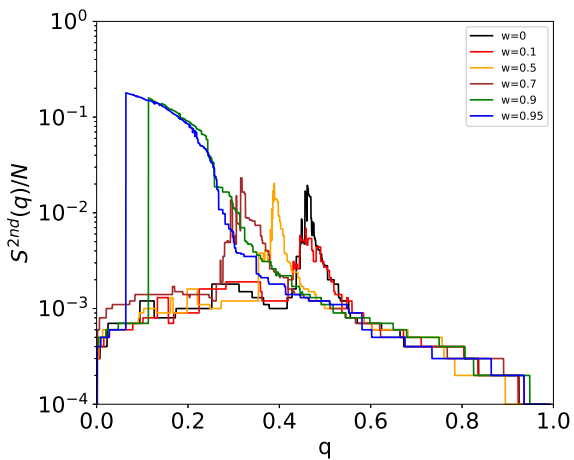
各プロットの異なる曲線は、リワイヤリングパラメータ w の異なる値に対応している。 w が増加するにつれて、モジュール性が高くなる。図 10 19 の $\nu=0, 1$ の GN モデルで生成したネットワークと $\beta=5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワーク、全ての次数分布において、青線 ($w = 0.95$) と黒線 ($w = 0$) を比較すると、青線は最大連結成分のサイズが急に減少しているのに対し、黒線は緩やかに減少している。したがって、連続的に変化する次数分布において、モジュール性を高めるほどネットワークはより脆弱になる。



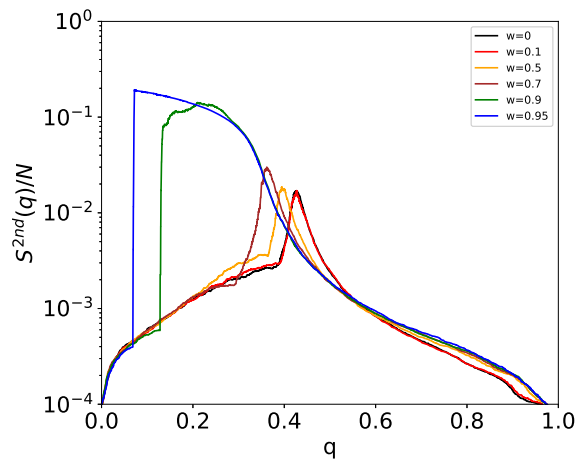
(a) 1st LCC, $m_0 = 5$, $\nu = 1$



(b) 1st LCC, $m_0 = 5$, $\nu = 0$

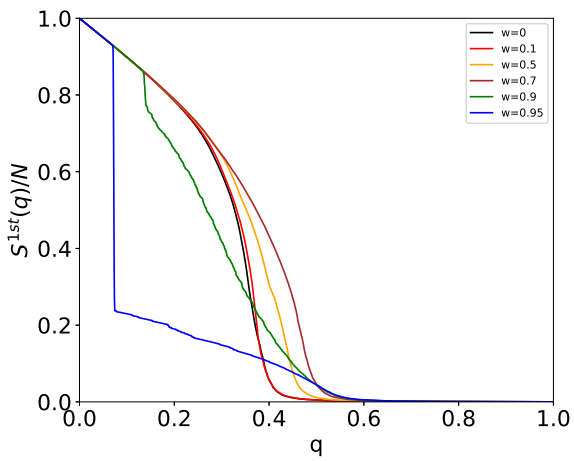


(c) 2nd LCC, $m_0 = 5$, $\nu = 1$

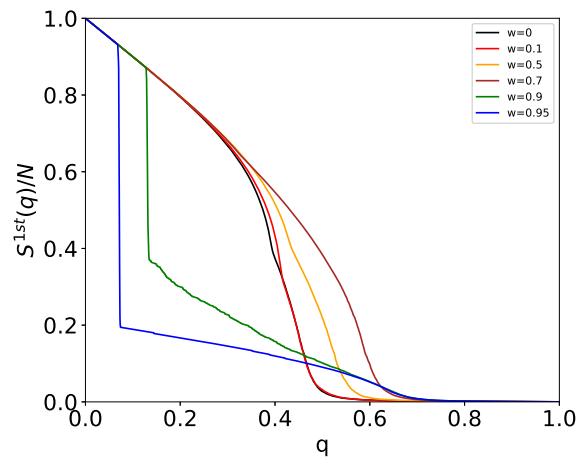


(d) 2nd LCC, $m_0 = 5$, $\nu = 0$

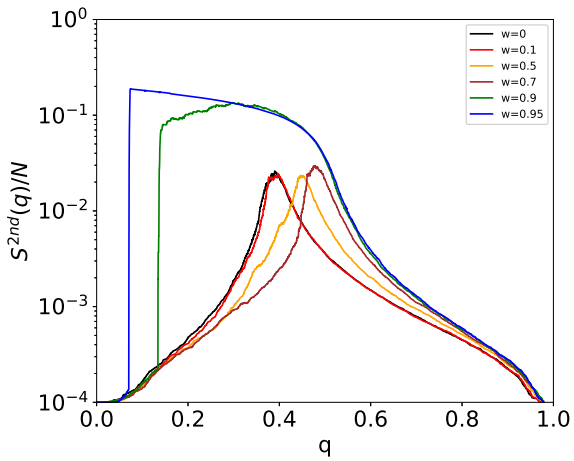
図 9: $\nu=0, 1$ の GN モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 5$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分



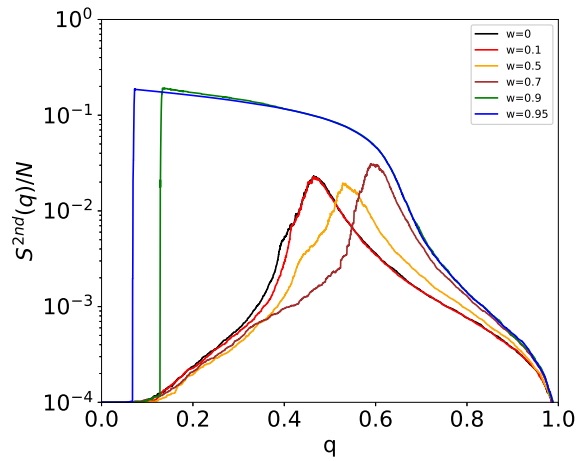
(a) 1st LCC, $m_0 = 5$, $\beta = 5$



(b) 1st LCC, $m_0 = 5$, $\beta = 100$

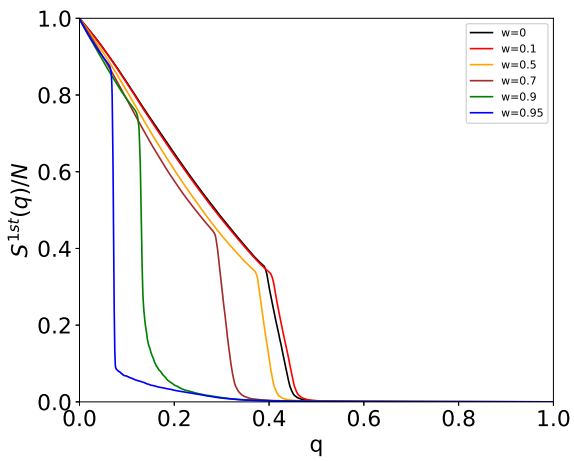


(c) 2nd LCC, $m_0 = 5$, $\beta = 5$

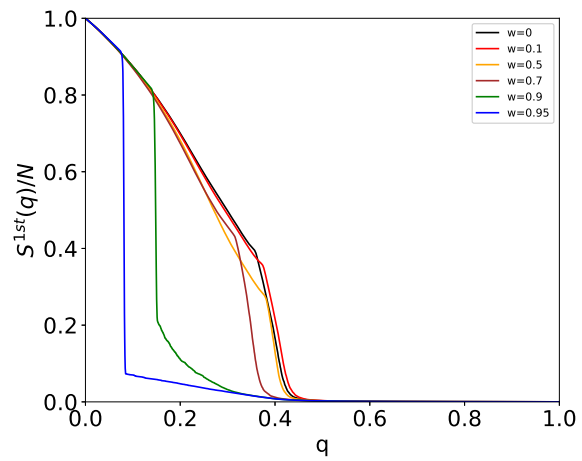


(d) 2nd LCC, $m_0 = 5$, $\beta = 100$

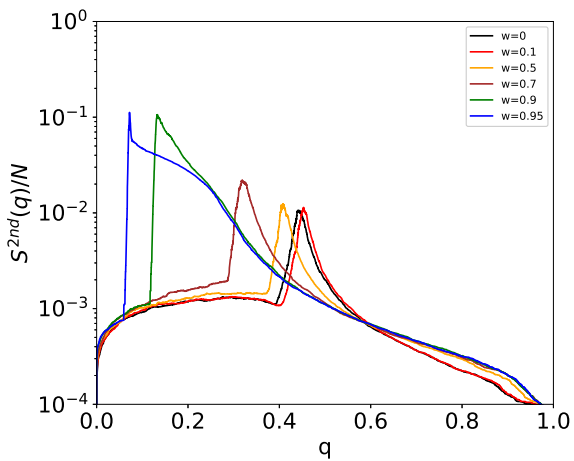
図 10: $\beta = 5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 5$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分



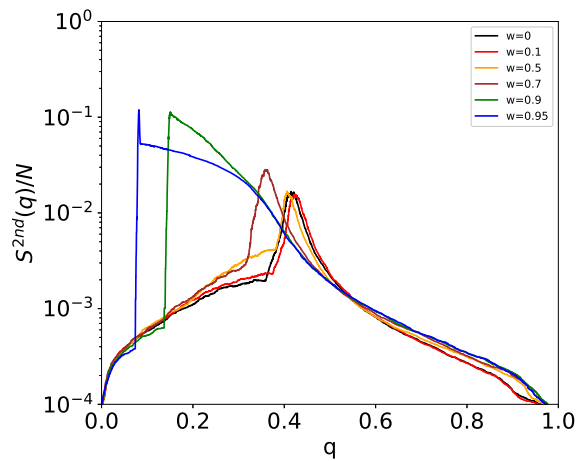
(a) 1st LCC, $m_0 = 20$, $\nu = 1$



(b) 1st LCC, $m_0 = 20$, $\nu = 0$

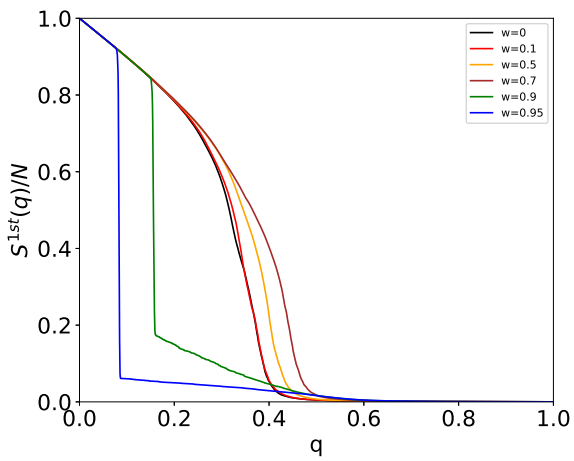


(c) 2nd LCC, $m_0 = 20$, $\nu = 1$

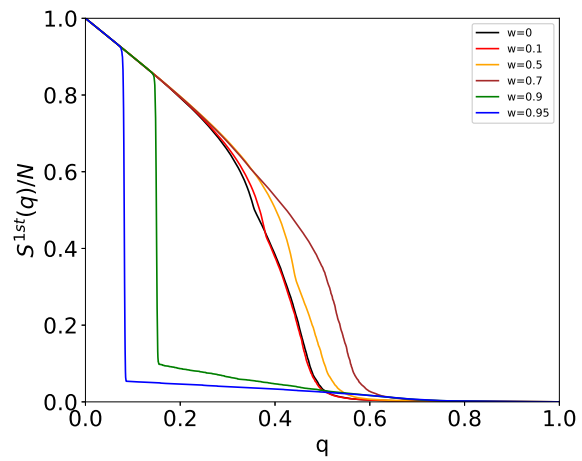


(d) 2nd LCC, $m_0 = 20$, $\nu = 0$

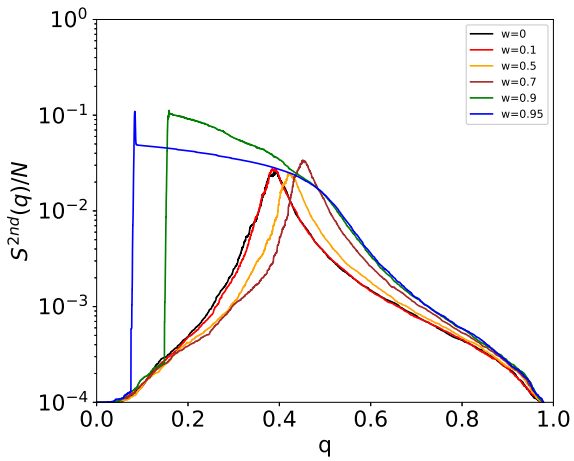
図 11: $\nu=0, 1$ の GN モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 20$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分



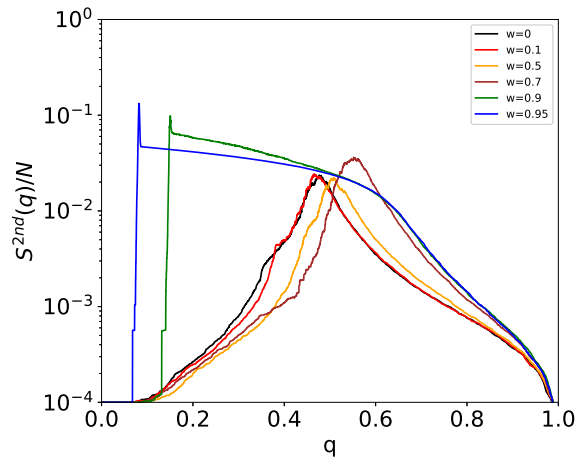
(a) 1st LCC, $m_0 = 20$, $\beta = 5$



(b) 1st LCC, $m_0 = 20$, $\beta = 100$

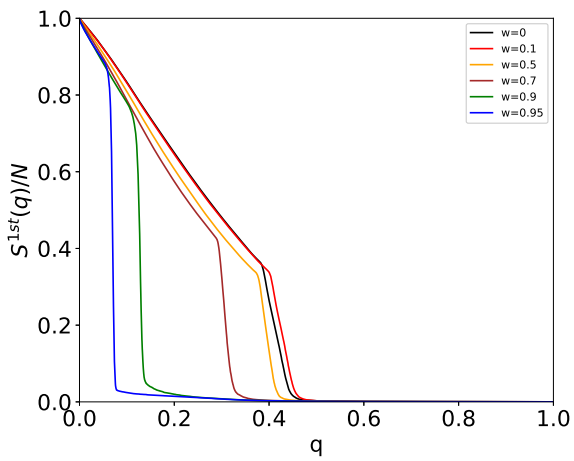


(c) 2nd LCC, $m_0 = 20$, $\beta = 5$

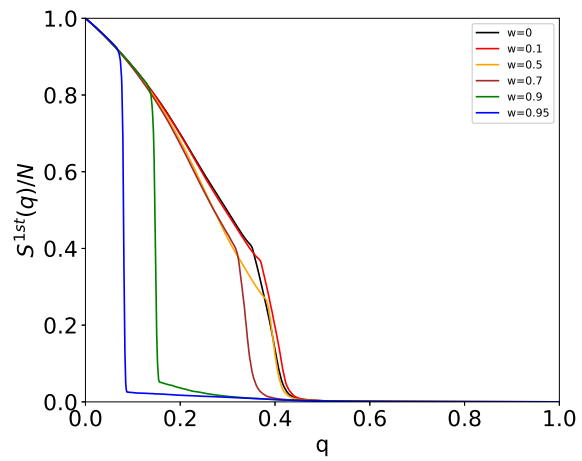


(d) 2nd LCC, $m_0 = 20$, $\beta = 100$

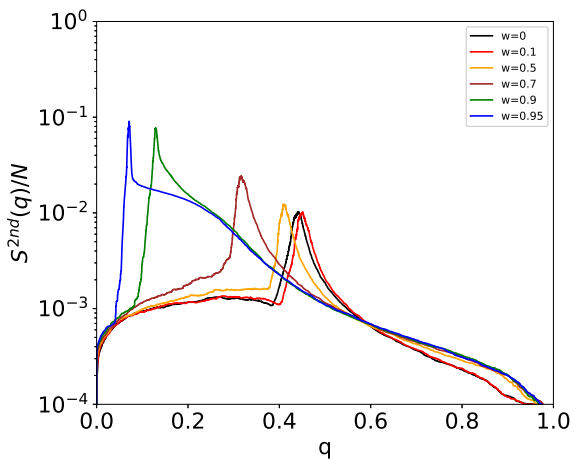
図 12: $\beta = 5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 20$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分



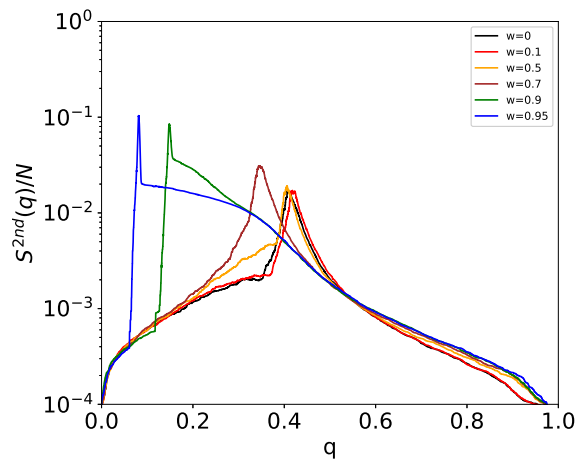
(a) 1st LCC, $m_0 = 50$, $\nu = 1$



(b) 1st LCC, $m_0 = 50$, $\nu = 0$

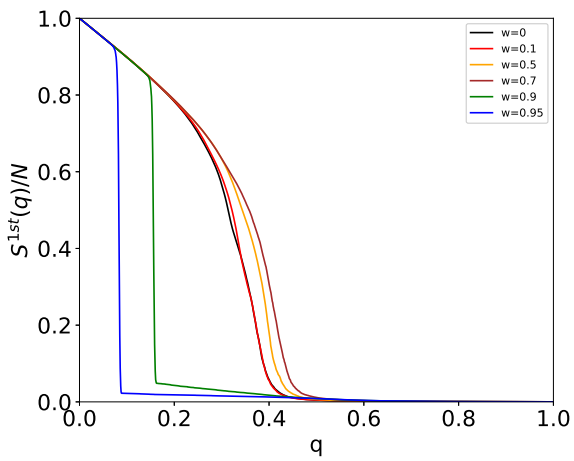


(c) 2nd LCC, $m_0 = 50$, $\nu = 1$

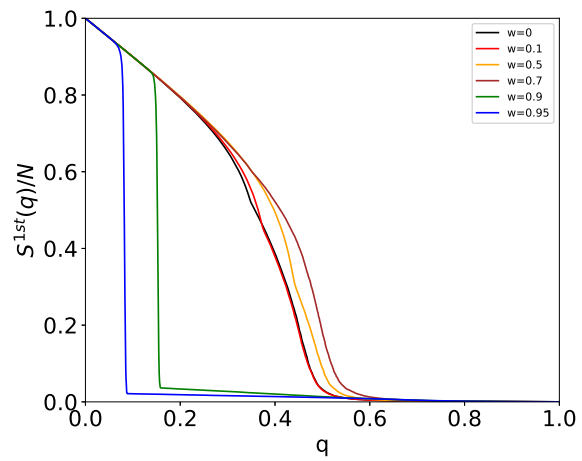


(d) 2nd LCC, $m_0 = 50$, $\nu = 0$

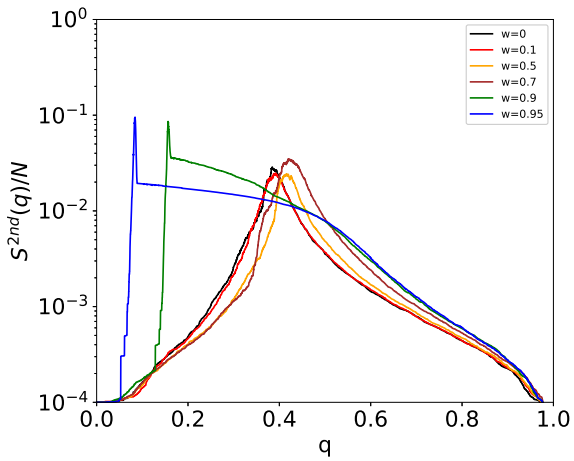
図 13: $\nu=0, 1$ の GN モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 50$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分



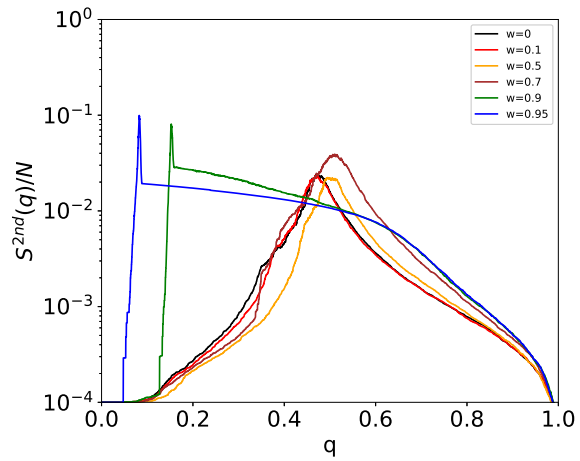
(a) 1st LCC, $m_0 = 50$, $\beta = 5$



(b) 1st LCC, $m_0 = 50$, $\beta = 100$

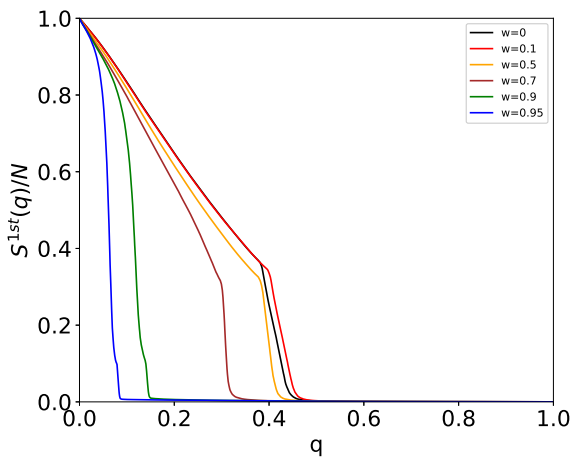


(c) 2nd LCC, $m_0 = 50$, $\beta = 5$

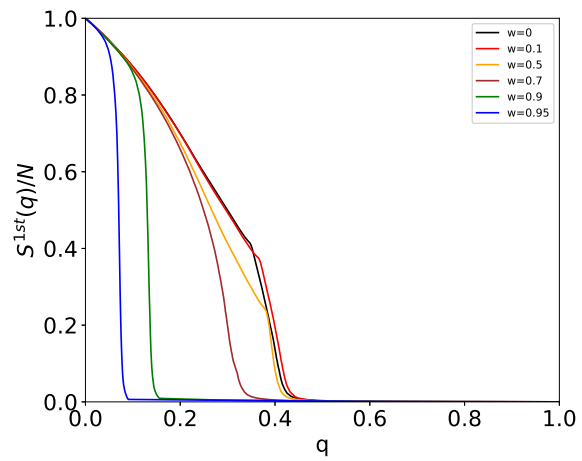


(d) 2nd LCC, $m_0 = 50$, $\beta = 100$

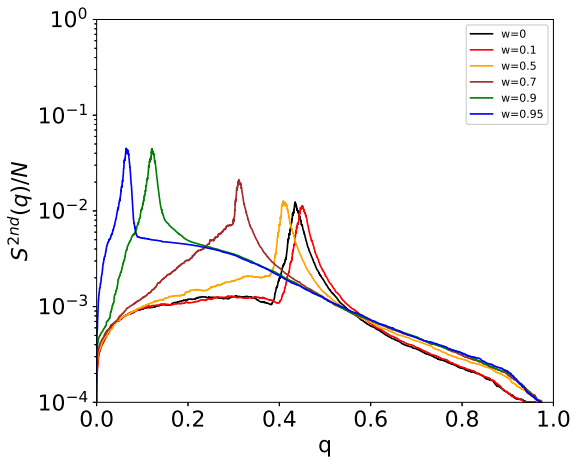
図 14: $\beta=5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 50$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分



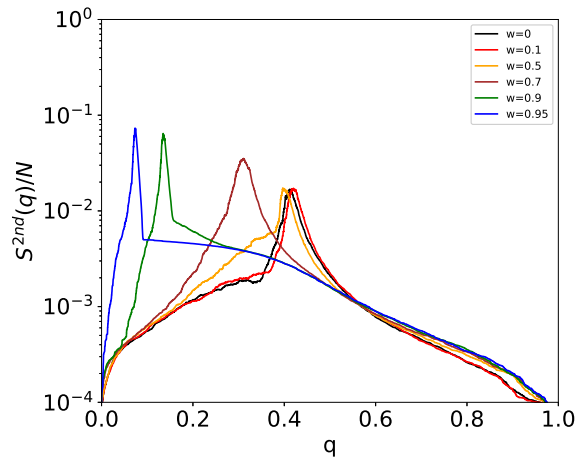
(a) 1st LCC, $m_0 = 200$, $\nu = 1$



(b) 1st LCC, $m_0 = 200$, $\nu = 0$

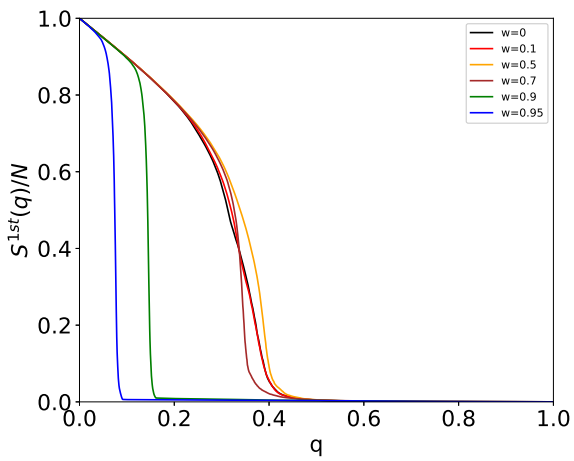


(c) 2nd LCC, $m_0 = 200$, $\nu = 1$

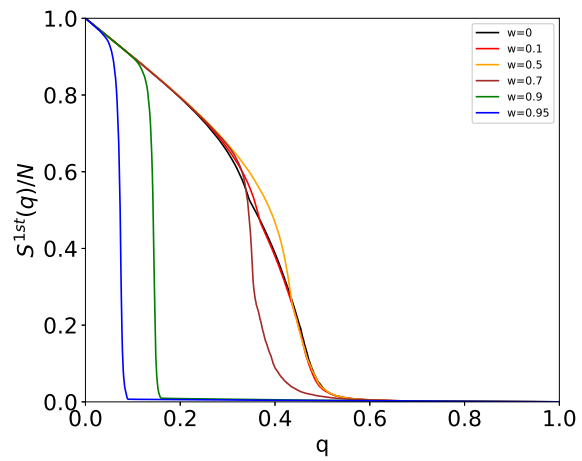


(d) 2nd LCC, $m_0 = 200$, $\nu = 0$

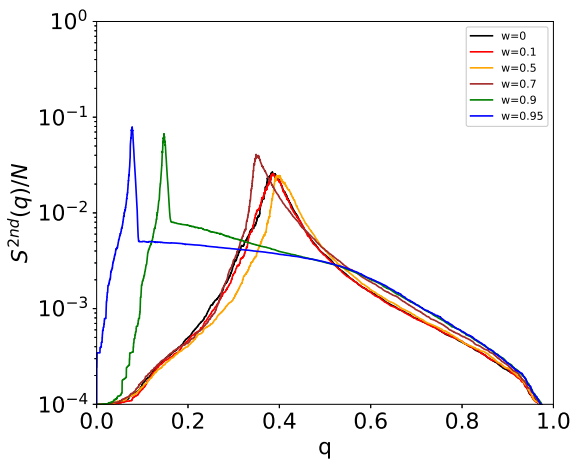
図 15: $\nu=0, 1$ の GN モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 20$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分



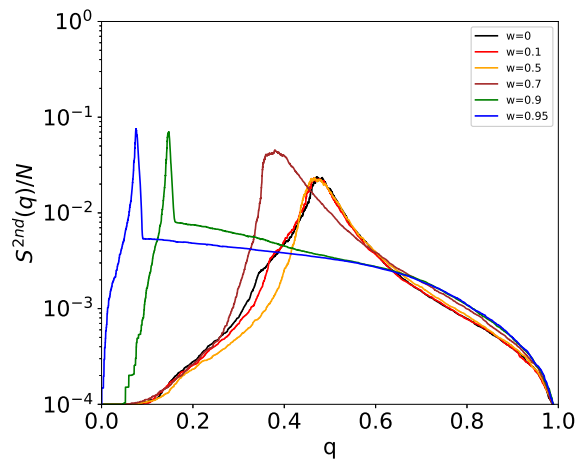
(a) 1st LCC, $m_0 = 200$, $\beta = 5$



(b) 1st LCC, $m_0 = 200$, $\beta = 100$

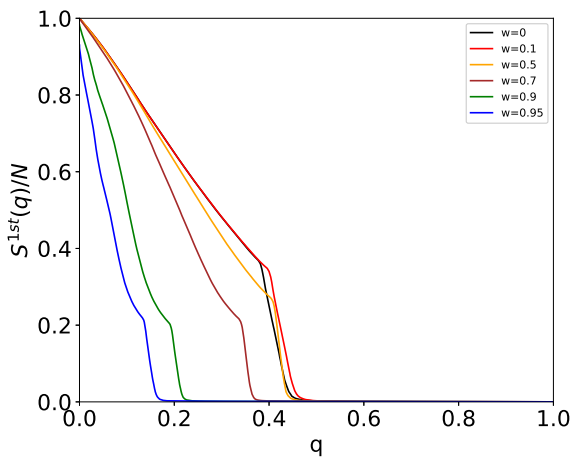


(c) 2nd LCC, $m_0 = 200$, $\beta = 5$

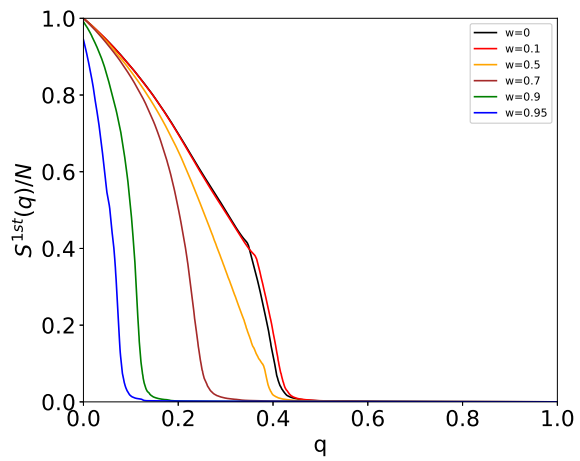


(d) 2nd LCC, $m_0 = 200$, $\beta = 100$

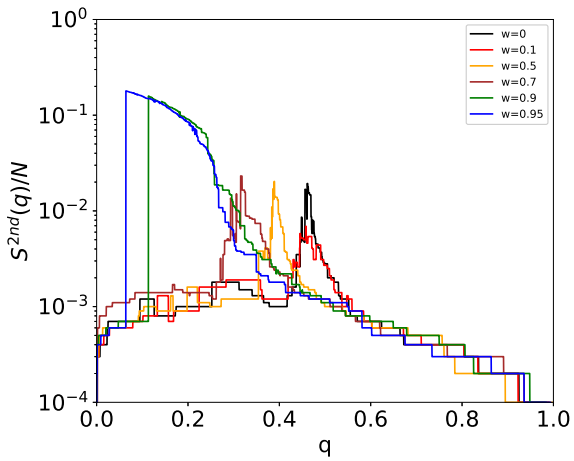
図 16: $\beta = 5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 200$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分



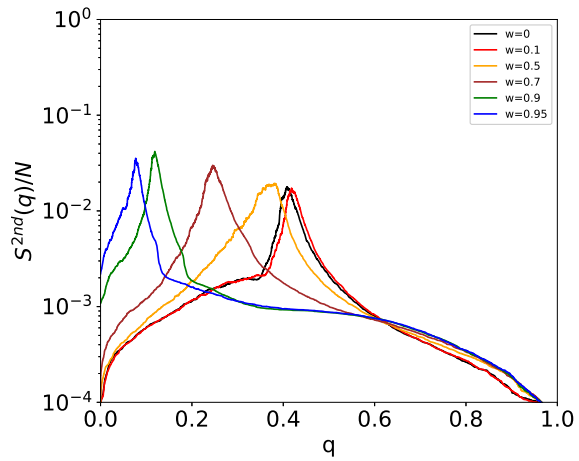
(a) 1st LCC, $m_0 = 1000$, $\nu = 1$



(b) 1st LCC, $m_0 = 1000$, $\nu = 0$

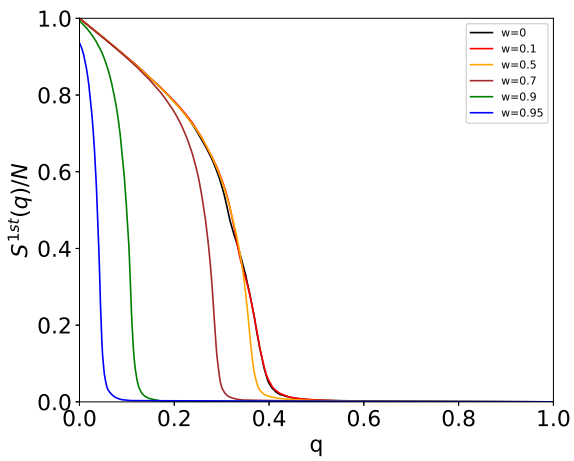


(c) 2nd LCC, $m_0 = 1000$, $\nu = 1$

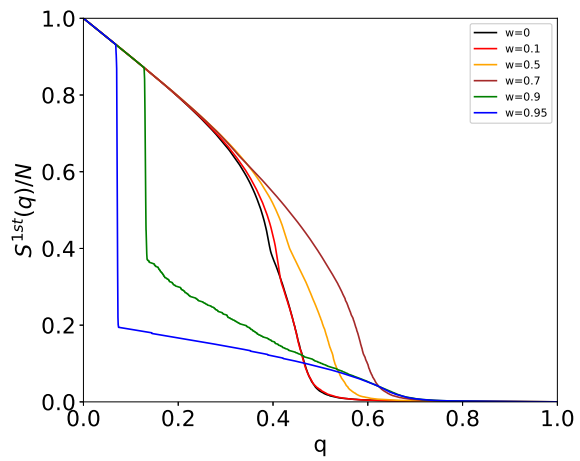


(d) 2nd LCC, $m_0 = 1000$, $\nu = 0$

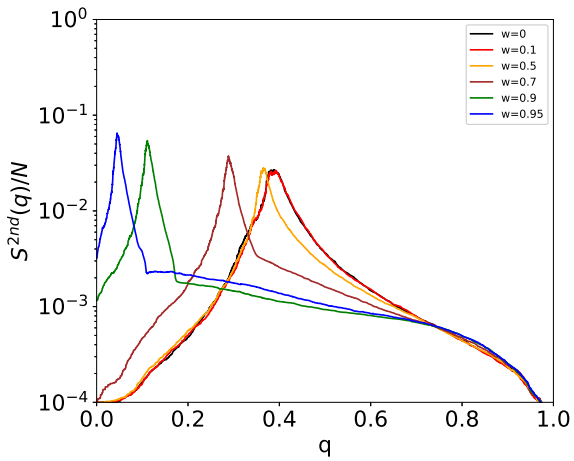
図 17: $\nu=0, 1$ の GN モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 1000$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分



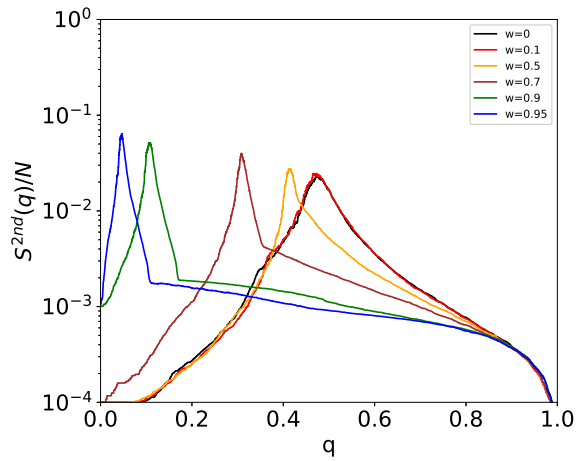
(a) 1st LCC, $m_0 = 1000$, $\beta = 5$



(b) 1st LCC, $m_0 = 1000$, $\beta = 100$



(c) 2nd LCC, $m_0 = 1000$, $\beta = 5$



(d) 2nd LCC, $m_0 = 1000$, $\beta = 100$

図 18: $\beta=5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワークのモジュール数 $m_0 = 1000$ の際のリワイヤリング後、MB 攻撃を与えた際の最大連結成分と 2 番目の連結成分

5.3 モジュール性 Q と攻撃による頑健性指標 R

図 20, 21 はそれぞれ、 $\nu=1, 0$ の GN モデルで生成したネットワークのリワイヤリング後のネットワークにおける次数順攻撃、媒介中心性攻撃、モジュールに基づく攻撃におけるモジュール性 Q と頑健性の変化を示した図である。

グラフに示されたデータからは、モジュール性の値 $Q(W)$ の増加とともに、 R_{ID} 、 R_{IB} 、 R_{MB} の頑健性指標が減少する傾向が見られる。これは、高いモジュール性を有するネットワークが、次数順攻撃、媒介中心性攻撃、モジュールに基づく攻撃において脆弱性を持つことを示唆している。この原因は、モジュール間の接続が弱いために、一部のモジュールが攻撃されるとネットワーク全体の連続性が損なわれやすいと考えられる。

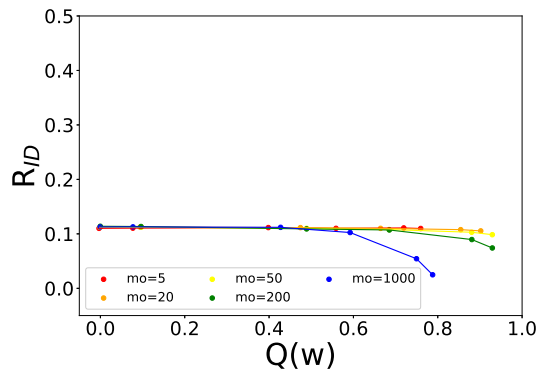
より詳しく見ると、グラフの色分けされた線は、異なるモジュール数 m_0 を表しており、モジュール数が多い場合（例えば緑線の $m_0 = 200$ ）、モジュール性の増加による頑健性の減少は比較的小さい。これは、多くの小さなモジュールが存在すると、一部のモジュールが隔離されても他のモジュールへの影響が少なく、ネットワーク全体として一定の攻撃に耐えうることを意味している。一方で、モジュール数が少ない場合（例えば青線の $m_0 = 5$ ）、モジュール性の増加に伴う頑健性の比較的大きい減少が観察される。これは、少数の大きなモジュールが攻撃を受けると、ネットワーク全体に大きな影響が及ぶことを意味している。

図 22, 23 は、 $\beta=5, 100$ の IPA モデルで生成したネットワークのリワイヤリング後のネットワークにおける次数順攻撃、媒介中心性攻撃、モジュールに基づく攻撃による頑健性の変化を示した図である。

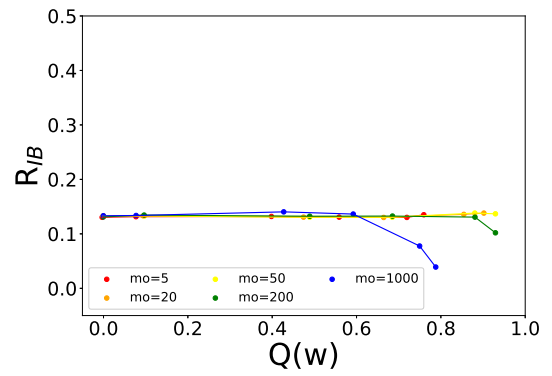
図 20, 21 と比較すると、次数分布が狭い場合に相当する図 22, 23 では、ネットワークは次数が高いノードが少なくなり次数順攻撃に対する頑健性が向上する傾向がある。これは、攻撃が特定の高次数ノードに集中することが少なくなるため、ネットワーク全体としての攻撃への耐性が高まることを意味している。図 22, 23 において、モジュール数が増加するにつれて頑健性指標の減少率が増加していることが観察されるが、この減少率は図 20, 21 でのそれよりも急である。これは、次数分布が狭いことで全体のネットワークの次数に均一性が増し、攻撃に対しての脆弱性が分散されるためと考えられる。次数分布が均一になると、攻撃が一部のノードに集中することが減り、結果としてネットワークは様々な攻撃手法に対して一定の耐性を持つようになる。

モジュール性の値 $Q(W)$ が同じであっても、図 20, 21 と図 22, 23 の R_{ID} 、 R_{IB} 、 R_{MB} の頑健性指標は異なる挙動を示している。これは、モジュール性の絶対値だけでなく、ネットワークの次数分布がネットワークの頑健性に影響を与えることを示している。特に、次数分布が狭いネットワークでは、モジュール数が少ない場合でも比較的高い頑健性を維持できる可能性がある。これは、攻撃が特定のノードやモジュールに局限されず、ネットワーク全体にわたるため、個々のモジュールが隔離されてもネットワークの機能が維持されやすいからである。

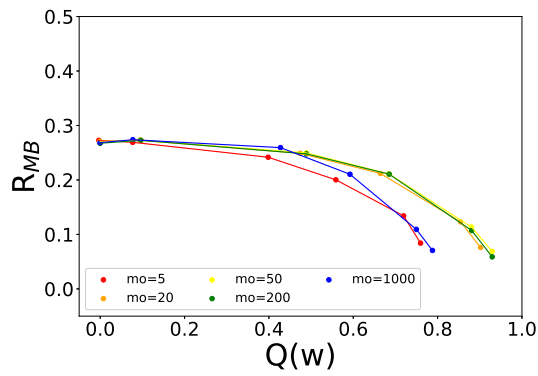
したがって、ネットワークを設計する際には、モジュール性の高さだけでなく、次数分布の特性も考慮に入れ、両者のバランスを適切に取ることが、攻撃に対する頑健性を最大化する鍵となる。



(a) 次数順攻撃

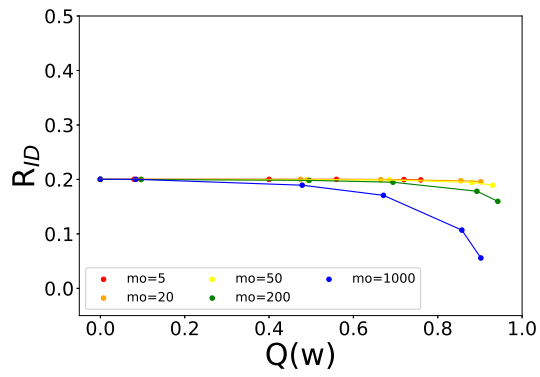


(b) 媒介中心性攻撃

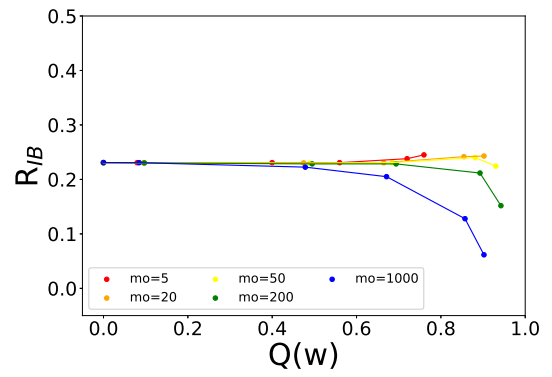


(c) モジュールに基づく攻撃

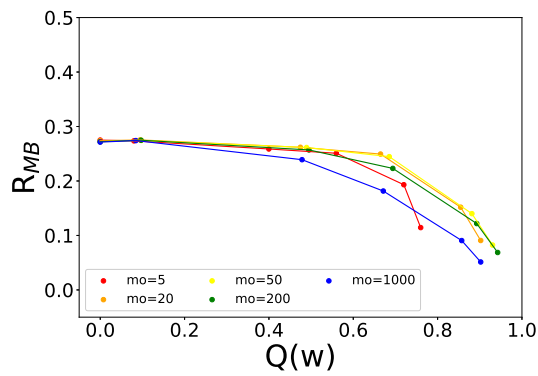
図 19: $\nu=1$ の GN モデルで生成したスケールフリーネットワークのリワイヤリング後のネットワークにおける (a) 次数順攻撃、(b) 媒介中心性攻撃、(c) モジュールに基づく攻撃による頑健性の変化。



(a) 次数順攻撃

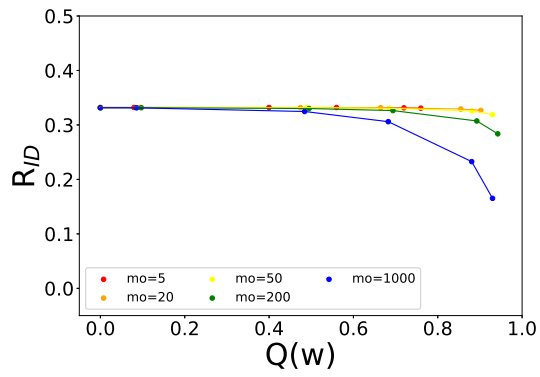


(b) 媒介中心性攻撃

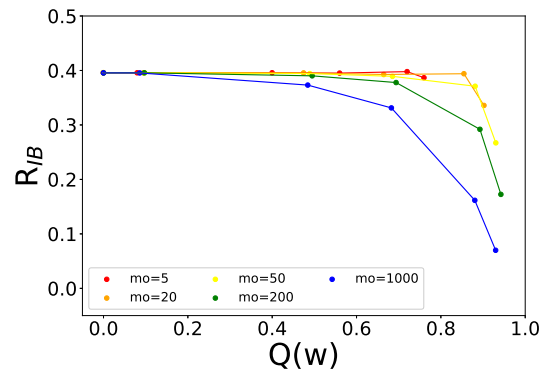


(c) モジュールに基づく攻撃

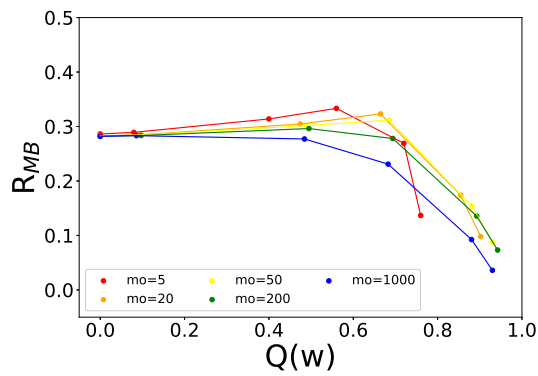
図 20: $\nu=0$ の GN モデルで生成したネットワークのリワイヤリング後のネットワークにおける (a) 次数順攻撃、(b) 媒介中心性攻撃、(c) モジュールに基づく攻撃による頑健性の変化。



(a) 次数順攻撃

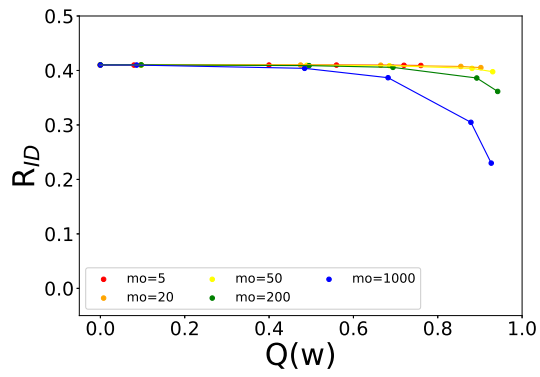


(b) 媒介中心性攻撃

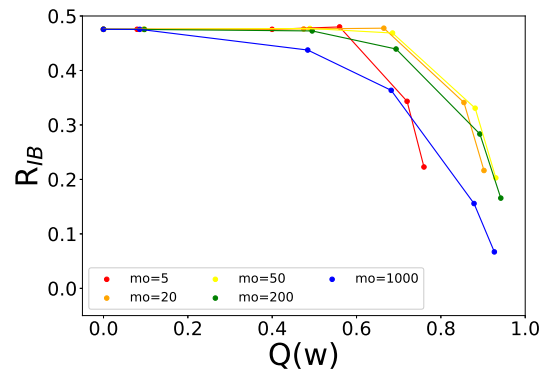


(c) モジュールに基づく攻撃

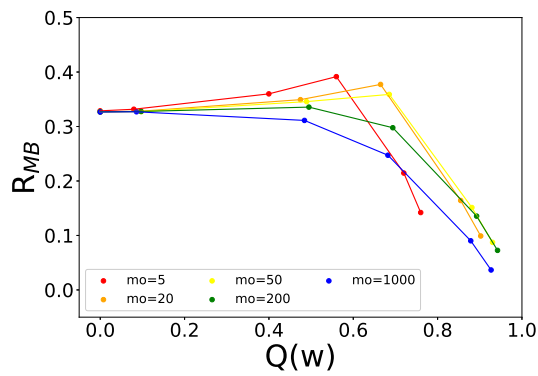
図 21: $\beta = 1$ の IPA モデルで生成したネットワークのリワイヤリング後のネットワークにおける (a) 次数順攻撃、(b) 媒介中心性攻撃、(c) モジュールに基づく攻撃による頑健性の変化。



(a) 次数順攻撃



(b) 媒介中心性攻撃



(c) モジュールに基づく攻撃

図 22: $\beta = 1000$ の IPA モデルで生成したネットワークのリワイヤリング後のネットワークにおける (a) 次数順攻撃、(b) 媒介中心性攻撃、(c) モジュールに基づく攻撃による頑健性の変化。

第6章 おわりに

本研究では、連続的に変化する次数分布を持つネットワーク内のモジュール構造がその頑健性に与える影響を明らかにした。特に、次数分布とモジュール性といった要素がネットワークの頑健性に与える影響について詳細な調査を行った。ネットワークのモジュール化を促進するリワイヤリング手法を導入し、その効果を実証的に評価した。また、次数順攻撃、媒介中心性攻撃、モジュールに基づく攻撃という異なる攻撃手法に対して、モジュール化ネットワークの脆弱性と狭い次数分布による頑健性の両面を明らかにした。

6.1 今後の展望

今後の研究では、以下の点から探求を深めることが望まれる。

1. モジュール数 m_0 の増加がネットワークの脆弱性をどのように変化させるかをさらに深く理解する。モジュール数とリワイヤリング戦略の組み合わせがネットワークの全体的な耐障害性に及ぼす影響を定量的に分析する。
2. モジュール性だけでなく、ネットワークの他の特性（例えば、クラスタリング係数や小世界性など）との相互作用を考慮した総合的な研究を行う。ネットワークの頑健性に影響を与える複数の因子を統合的に理解する。
3. 様々な攻撃シナリオ（例えば、カスケード故障、ランダム故障など）に対するネットワークの頑健性を評価し、異なるタイプの攻撃に対するネットワークの脆弱性を理解する。

本研究を通じて、ネットワークのモジュール構造と頑健性に関する新たな視点を提供できたことを願っている。上記に対する今後の研究が、より効果的なネットワーク設計と保護への道を開くことを期待する。

謝辞

本研究を遂行するにあたり、適切な指導を賜った主任研究指導教員である北陸先端科学技術大学院大学先端科学技術研究科 林幸雄教授に深く感謝申し上げます。また、副主任指導教員として本研究に対する有益な助言を賜りました金沢大学自然科学研究科 坂元二郎教授に感謝申し上げます。最後に、大学院での研究生活を有意義にしてくれた研究室メンバーにも感謝します。

参考文献

- [1] A. -L. Barab´asi and R. Albert, ”Emergence of scaling in random networks,” *Science*, Vol.286, pp.509-512, (1999).
- [2] A. -L. Barab´asi, R. Albert and H. Jeong, ”Mean-field theory for scale-free random networks,” *Physica A*, Vol.272, pp.173-187, (1999).
- [3] R. Albert, H. Jeong and A.-L. Barab´asi, ”Error and attack tolerance of complex networks,” *Nature*, Vol.406.6794, pp.378-382, (2000).
- [4] Z. -X. Wu and P. Holme, ”Onion structure and network robustness,” *Physical Review E*, Vol.84(2), pp.026106, (2011).
- [5] Y. Hayashi, ”A new design principle of robust onion-like network selforganized in growth,” *Network Science*, Vol.6(1), pp.54-70, (2018).
- [6] Fuxuan Liao, Yukio Hayashi “Emergence of robust and efficient networks in a family of attachment models” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* Volume 599, 1 August 2022, 127427
- [7] A. -L. Barab´asi, (青木 薫 訳), *新ネットワーク思考*, NHK 出版, 2002.
- [8] R. V. Sol´e, R. Pastor-Satorras, E. R. Smith and T. B. Kepler, ”A model of large-scale proteome evolution,” *Advances in Complex Systems*, Vol.5, pp.43-54, (2002).
- [9] Newman, M. *Networks: an introduction*. Oxford university press, 2010.
- [10] C. Scneider, A. A. Moreira, J. S. Andrade Jr, S. Havlin and H. J. Herrmann, ”Mitigation of malicious attacks on networks,” *Proceeding of the National Academy of Sciences*, Vol.108.10, pp.3838-3841, (2011).
- [11] Yukio Hayashi and Naoya Uchiyama. Onion-like networks are both robust and resilient. *Scientific Reports*, 8(1):1–13, 2018.
- [12] Alfredo Braunstein, Luca Dall’Asta, Guilhem Semerjian, and Lenka Zdeborov´a. Network dismantling. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(44):12368–12373, 2016.
- [13] Hai-Jun Zhou. Spin glass approach to the feedback vertex set problem. *European Physical Journal B*, 86(11):455, 2013.

- [14] Hau Chan and Leman Akoglu. Optimizing network robustness by edge rewiring: a general framework. *Data Mining and Knowledge Discovery*, 30(5):1395–1425, 2016.
- [15] Masaki Chujyo Yukio Hayashi, ” A loop enhancement strategy for network robustness ” *Applied Network Science* volume 6, Article number: 3 (2021)
- [16] Lazaros K Gallos, Shlomo Havlin, H Eugene Stanley, and Nina H Fefferman. Propinquity drives the emergence of network structure and density. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 116(41):20360–20365, 2019.
- [17] Masaki Chujyo, and Yukio Hayashi, “ Adding links on minimum degree and longest distance strategies for improving network robustness and efficiency. ” *PLOS ONE* 17(10) pp. 1-20 (2022).
- [18] P.L. Krapivsky and S. Redner. “ A statistical physics perspective on Web growth ” . In: *Computer Networks* 39.3 (2002), pp. 261–276. issn: 1389-1286.
- [19] Paul L Krapivsky and Sidney Redner. “ Organization of growing random networks ” . In: *Physical Review E* 63.6 (2001), p. 066123.
- [20] Paul L Krapivsky, Sidney Redner, and Francois Leyvraz. “ Connectivity of growing random networks ” . In: *Physical review letters* 85.21 (2000), p. 4629.
- [21] ”graph-toolEfficient network analysis” <https://graph-tool.skewed.de/>
- [22] Quang Nguyen, Tuan V. Vu, Hanh-Duyen Dinh, Davide Cassi, Francesco Scotognella, Roberto Alferi Michele Bellingeri. *Applied Network Science* volume 6, Article number: 82 (2021)
- [23] Duncan S. Callaway, John E. Hopcroft, Jon M. Kleinberg, M. E. J. Newman, and Steven H. Strogatz. Are randomly grown graphs really random? *Physical Review E*, 64(4):041902, Sep 2001.
- [24] Michele Catanzaro, Mari´ an Boguñ´ a, and Romualdo Pastor-Satorras. Generation of uncorrelated random scale-free networks. *Physical Review E*, 71(2):027103, Feb 2005.
- [25] Daniel Jian Sun, Yuhan Zhao, and Qing-Chang Lu. Vulnerability analysis of urban rail transit networks: A case study of shanghai, china. *Sustainability*, 7(6):6919–6936, 2015.
- [26] Linton C Freeman, Stephen P Borgatti, and Douglas R White. Centrality in valued graphs: A measure of betweenness based on network flow. *Social networks*, 13(2):141–154, 1991.
- [27] B Requiˆao da Cunha. ”Fast Fragmentation of Networks Using Module-Based Attacks” (2015)